

CAOS

© 2001 JUAN IGNACIO CASAUBON
Todos los derechos reservados

Cláusula de Copyright



[http://www.copyright.limited.to/
copyright_ebooks@hotmail.com](http://www.copyright.limited.to/copyright_ebooks@hotmail.com)

© 2001 Copyright <http://www.copyright.limited.to/>
Por la presente edición electrónica
Todos los derechos reservados

Editado en Buenos Aires, Argentina, Diciembre de 2001

Comentado [PP1]: "CAOS"

© 2001 Juan Ignacio Casaubon - Reservados todos los derechos, Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita del titular del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, incluidos la reprografía y el tratamiento informático.

All rights reserved. No part of this work may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system without permission in writing from the author.

Autorización del Autor / Permission from the Author
El autor autoriza únicamente a los visitantes de "Copyright" <http://www.copyright.limited.to/> a bajar el archivo que contiene la obra de su Copyright. Queda expresamente entendido que dicha autorización es al sólo efecto de su difusión con propósitos educativos / culturales, sin fines de lucro, ni comerciales de ningún tipo.
The author kindly invite to the World Wide Web surfers to download the file that contains the aboverferenced work Copyright reserved. This special permission is only for educational purposes. Commercial uses are prohibited. Any other terms of the Copyright remain unchanged.

A los editores / To the Publishers
La presente obra es inédita en gráfica. Asimismo, como "Libro virtual" (e-book), permanece sin comercializar. Cualquier Editor interesado en publicar y/o comercializar la misma puede contactar a: rguido@cvtci.com.ar
The abovementioned work has not been edited yet (paper), still more, It remains without commercialization as a e-book. If any Publishers have an interest in it, please e-mail to the following address: rguido@cvtci.com.ar

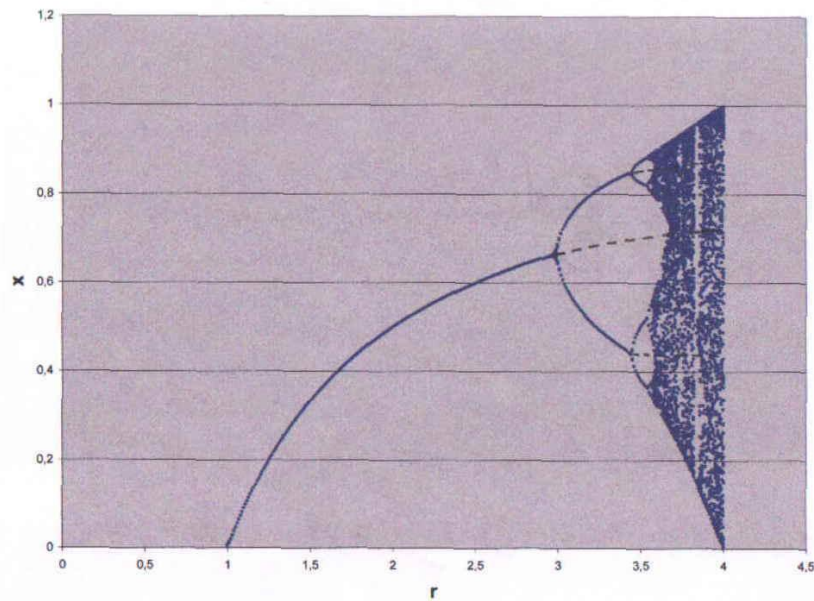


CAOS

I

CAOS

Juan Ignacio Casaubon



© 2001 JUAN IGNACIO CASAUBON
Todos los derechos reservados



AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Máximo Barón, al Dr. Rubén Piacentini, al Ing (MBA) Fernando Carneiro, al Dr. Daniel Gamarra, al Dr. Ricardo Crespo y a la Profesora Paula Porter,
Y a todos los que me ayudaron y no recuerdo.

**ÍNDICE**

<u>INTRODUCCIÓN</u>	P.4
<u>CAPÍTULO 1:</u> HISTORIA, POINCARÉ Y LORENZ. DEFINICIÓN DE CAOS.	P.5
<u>CAPÍTULO 2:</u> CONTROL DEL CAOS.	P.18
<u>CAPÍTULO 3:</u> FLUJOS EN UNA DIMENSIÓN. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. PUNTOS FIJOS. ESTABILIDAD.	P.31
<u>CAPÍTULO 4:</u> FLUJO EN EL CÍRCULO. FANTASMA Y CUELLO DE BOTELLA.	P.41
<u>CAPÍTULO 5:</u> SISTEMAS LINEALES. ESPACIO DE LAS FASES. CLASIFICACIÓN.	P.45
<u>CAPÍTULO 6:</u> SISTEMAS NO LINEALES. LINERIZACIÓN. RETRATO DE LAS FASES.	P.57
<u>CAPÍTULO 7:</u> CICLOS LÍMITES.	P.64
<u>CAPÍTULO 8:</u> CAOS. EL MOLINO DE LORENZ.	P.70
<u>CAPÍTULO 9:</u> FRACTALES. CANTOR. KOCH. DIMENSIÓN DE UN FRACTAL.	P.80
<u>CAPÍTULO 10:</u> ATRACTORES EXTRAÑOS. HERRADURA DE SMALE. MAPA DEL PANADERO.	P.84
<u>CAPÍTULO 11:</u> CAOS, RUIDO, AZAR, CAUSA.	P.91
<u>CAPÍTULO 12:</u> CIENCIA, EDUCACIÓN, CULTURA, CIVILIZACIÓN, TÉCNICA.	P.93
<u>CAPÍTULO 13:</u> LA LEYENDA DE LA FRUTA MARRÓN	P.100
<u>REFERENCIAS</u>	P.103



INTRODUCCIÓN

Este libro fue escrito como preparación de un curso de 10 días sobre caos y dinámica no lineal a dar en Facultad de Ingeniería de la Universidad de Belgrano. También sirvió de guía para la enseñanza del caos en la materia "Introducción a la Física" de la carrera de Nutrición de la misma Universidad en el 2001. Este tema fue incluido en esta carrera en vistas de la aplicación del caos al organismo humano. El corazón enfermo (1), la fibrilación; así como aplicación al EEC (2) y al ECG (2). También se ha aplicado al estudio de la respuesta eléctrica de los nervios (3), el cerebro (4) etc. Por este motivo el caos a sido visto de utilidad en ciencias biológicas y médicas.

En este libro no solo hablaremos de caos sino también esbozaremos sus implicancias filosóficas. Es por esto que trataremos también del azar y la causa, del caos y la libertad, etc.

Los requisitos para entender en toda profundidad este libro son el conocimiento del análisis matemático, las matrices, física clásica básica, una idea de ecuaciones diferenciales ordinarias, computación.

En muchos libros de caos se comienza por el estudio de los sistemas dinámicos lineales y no lineales, sus propiedades, las bifurcaciones, etc., para llegar recién en los últimos capítulos al caos. Hemos incluido el caos desde el primer capítulo, ya que el mapa logístico es suficientemente sencillo de entenderse. Así el lector comprenderá el caos desde el principio.

Pero consideramos también que toda ciencia se hace por hombres en un contexto social y por eso hemos incluido nuestras ideas de la relación de la ciencia con la Universidad, la política científica y la filosofía política en general.

Para profundizar más, después de este libro, recomiendo el de Strogatz (9), al cual hemos seguido en muchos temas de este libro.



CAPITULO 1

HISTORIA, POINCARÉ Y LORENZ. DEFINICIÓN DE CAOS

Las dos grandes revoluciones de la Física del principio del siglo XX son la Mecánica Cuántica de Planck y la Teoría de la Relatividad de Einstein. Así mismo podemos decir que los otros dos grandes descubrimientos de la segunda mitad del siglo XX son la unificación electrodébil de Weimberg y Salam, y el Caos de Lorenz. La Mecánica Cuántica dice que el intercambio de energía se hace de a “cuantos” y no en forma continua. Esta mecánica se mostró muy útil para lo microscópico (átomos, moléculas...) pero en lo macroscópico se puede seguir usando la mecánica clásica de Newton. La relatividad especial se aplica a partículas a velocidades cercanas a la velocidad de la luz y nuevamente podemos usar la Mecánica Clásica para sistemas con velocidad chica respecto de la luz. La Física siempre buscó la unificación entre sus diversas ramas. Así fue como la electricidad y el magnetismo fueron unificadas en el Electromagnetismo. Unificar significa dar unas ecuaciones que permitan describir ambas teorías relacionando sus magnitudes. Son cuatro los tipos fundamentales de fuerzas que existen: electromagnética, gravitación, fuerte y débil, estas dos últimas son de origen nuclear. La fuerte es responsable de la atracción entre los nucleones, componentes del núcleo y la débil la que explica la emisión beta. La unificación electrodébil logra relacionar el electromagnetismo y la débil.

La teoría del Caos empezó en 1963 con el trabajo de Lorenz (5) publicado en una oscura revista de ciencias de la atmósfera. Este trabajo fue desconocido por los físicos y matemáticos hasta que poco a poco se lo llegó a ver tan importante como el nacimiento de una nueva ciencia (6).

En el trabajo de Lorenz se intentaba dar una explicación y predicción global del clima atmosférico. Las ecuaciones que modelaban la atmósfera y que hoy se saben que son insuficientes (7), son aproximaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes. Se llegaba finalmente a estas tres ecuaciones diferenciales (5):

$$\frac{dX}{dt} = \sigma (Y - X)$$

$$\frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ \quad [1]$$



$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$

Aquí no interesa que es X, Y, Z desde el punto de vista físico sino que nos quedaremos solo con su aspecto matemático. Recordemos que la aproximación de Lorenz al clima es insuficiente (7). Es decir X, Y, Z son tres variables. Lo importante es que estas tres variables dependen del tiempo t. En las ecuaciones [1] vemos como varían con el tiempo. A la izquierda tenemos las derivadas de cada una con en tiempo, formando así un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Se llaman ecuaciones diferenciales porque envuelven derivadas y se llaman ordinarias porque no aparecen derivadas parciales.

Aquí es importante destacar que nos encontramos ante lo que se llama un sistema dinámico no lineal. Llamaremos sistema dinámico a un sistema dependiente del tiempo semejante al de Lorenz pero donde el número de ecuaciones puede ser menor (1 o 2), igual o mayor que 3.

Es no lineal porque la solución del sistema de ecuaciones no se puede poner como combinación lineal de soluciones. Es decir, en un sistema lineal, si f(t) es solución entonces k f(t) es solución. Además si f(t) es solución y g(t) es solución, también será solución f(t) + g(t). En general la combinación lineal k f(t) + p g(t) será solución.

Un sistema lineal vendría dado por

$$\dot{x} = Ax \quad [2]$$

Donde x es un vector de n componentes, $x \in \mathbf{R}^n$; el punto sobre la x significa derivada respecto al tiempo y A es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Aquí \mathbf{R} son los números reales.

El sistema de Lorenz no es lineal porque contiene productos entre sus variables. Por tanto, es fácil probar que la combinación lineal de soluciones no es solución.

Como ejemplo de sistema lineal [2] podemos dar la ecuación del resorte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x \end{aligned} \quad [3]$$



Aquí ω es la frecuencia angular o raíz cuadrada de la constante del resorte sobre la masa. No se asuste el lector si no vio nunca al resorte así escrito, con un simple reemplazo podrá volver a la ecuación conocida.

Hemos escrito así la ecuación del resorte [3], para que tenga la forma de los sistemas dinámicos. Es decir en forma semejante a las ecuaciones de Lorenz [1].

Una de las razones de la aplicación del caos a distintos tipos de ciencias naturales consiste en que se trata de ecuaciones donde las variables dependen del tiempo. Ahora esas variables pueden ser físicas, como la posición y velocidad de un péndulo; concentraciones de componentes químicos que varían con el tiempo en una reacción; las oscilaciones de un terremoto; la gráfica de un EEG, etc.

Pero hemos puesto las ecuaciones de Lorenz y no las hemos resuelto. Quédese tranquilo el lector. Estas ecuaciones no las resolvió ni Lorenz ni nadie hasta el presente, como la mayoría de las ecuaciones diferenciales no lineales.

Lorenz las atacó usando el método numérico, es decir la computadora. Él usó una Royal Mc Bee de su época y encontró un comportamiento altamente oscilatorio y aleatorio para alguno de los parámetros constantes que figuran en [1].

Pero lo más interesante que encontró Lorenz era que cambiando las condiciones iniciales muy poquito al cabo de un tiempo la solución era completamente distinta. Es decir descubrió la esencia del caos, o sea la "**alta sensibilidad a las condiciones iniciales**". Está aquí casi la definición del caos. Decimos casi porque puede haber gran sensibilidad a las condiciones iniciales y no caos. La solución puede divergir a infinito con gran sensibilidad a las condiciones iniciales y no tendremos caos ya que sabemos de antemano a donde va la evolución. Ya lo veremos mas adelante.

Para mas detalles de cómo Lorenz encontró en la computadora la gran variación con las condiciones iniciales ver las referencias [\(5\)](#), [\(6\)](#) y [\(8\)](#).

La alta sensibilidad a las condiciones iniciales es la que hace imposible un pronóstico meteorológico a largo plazo. Este gran cambio que puede producir una pequeña diferencia en las condiciones iniciales se la ha ejemplificado con el efecto mariposa: de 2 mariposas que aletean en



Buenos Aires, una puede no producir nada mientras que la otra produce un huracán en el Caribe.

Otro componente importante del caos y de los sistemas dinámicos en general es que son deterministas. Es decir que dado una condición inicial, las ecuaciones **determinan** el comportamiento subsiguiente.

Entonces caos queda definido como: **soluciones de sistemas dinámicos no lineales deterministas que oscilan aleatoriamente, con una oscilación irregular y aperiódica, y donde se tiene una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que lleva a la imposibilidad de la previsión del comportamiento a grandes tiempos (9).**

Toda medición física tiene error. Ponemos por ejemplo (2.142 ± 0.001) cm. Si usamos como condición inicial el valor medido con ese pequeño error, este se agrandará notablemente, dando soluciones muy distintas entre sí. Es decir calculando con 2.143 cm y luego con 2.141 cm, el resultado en función del tiempo, para tiempos grandes es completamente distinto, cuando se trata de sistemas caóticos.

Para seguir con un poco de historia debemos destacar como precursor del caos a Poincaré (10) en el siglo XIX. A él le debemos, entre otras cosas el tratamiento "geométrico" de las ecuaciones diferenciales y el uso del espacio de las fases, que veremos mas adelante. También los famosos mapas de Poincaré.

Podemos preguntarnos porqué hubo que esperar más de medio siglo para que el caos aparezca. Esto se debe a dos razones. Por un lado a la falta de computadoras y por otro lado al hecho de que haya prevalecido el "programa" de Hamilton y de Hilbert en la física clásica y cuántica, en vez del programa de Poincaré. Especialmente el hamiltoniano del átomo de hidrógeno, con su solución analítica exacta y su predicción del espectro. Para luego aplicarlo en forma aproximada a átomos con mas de un electrón y luego a las moléculas, usando la separación de Born-Oppenheimer y los tratamientos de Roothaan-Hartree-Fock y mejoras sucesivas.

También es de destacar el trabajo de Birkhoff (11) de 1927 como un importante tratado de sistemas dinámicos.



LA CONVECCIÓN

No quería dejar de nombrar someramente, aunque luego se va a entender en mayor profundidad, a la convección. Este hecho físico se estudia desde principios de siglo con Bernard [\(12\)](#) y Rayleigh [\(13\)](#). Consiste en la transición hacia la turbulencia de un fluido que es calentado desde abajo. Este sistema es interesante ya que puede observarse aún en una cocina cuando calentamos agua en una olla con fideos. Primeramente el líquido se mantendrá estable. Al seguir aumentando la temperatura se producirá la convección, es decir vollos de líquido mas calientes que suben, se enfrían y bajan. A mayor temperatura estas estructuras se complican llegando a la turbulencia (caos). Este experimento casero puede visualizarse mejor, perdiendo la sopa, si introducimos un poco de tinta roja. El paso a la turbulencia a través de las etapas convectivas equivale a la ruta al caos por bifurcaciones. Ya explicaremos en capítulos siguientes a estas últimas.

El estudio de la turbulencia en tubos lo empezó a estudiar desde 1883 Osborne Reynolds [\(14\)](#). El famoso número de Reynolds servirá para distinguir entre flujo laminar y turbulento. El flujo es laminar por ejemplo al abrir una canilla moderadamente, se transformará en borbotones desordenados al abrirla al máximo (turbulencia). También podemos observar la diferencia entre flujo laminar y turbulento en el humo que sale de un cigarrillo depositado en el cenicero. Primero asciende laminar y ordenado hasta una altura de unos 15 cm para luego mostrarse desordenado y turbulento.

MAPA LOGÍSTICO: CARACTERÍSTICAS. APLICACIÓN EN BIOLOGÍA

Antes que nada diremos que hay dos tipos de sistemas dinámicos. Uno es el ya visto, basado en ecuaciones diferenciales ordinarias, donde el tiempo es continuo.

Además esta el caso donde el tiempo es considerado discreto. Consiste en "ecuaciones de diferencias" o "mapas":

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad [4]$$

Se da un x_0 como condición inicial. Con [4] sacamos x_1 y lo volvemos a introducir en la fórmula y así sucesivamente. A este caso también se le



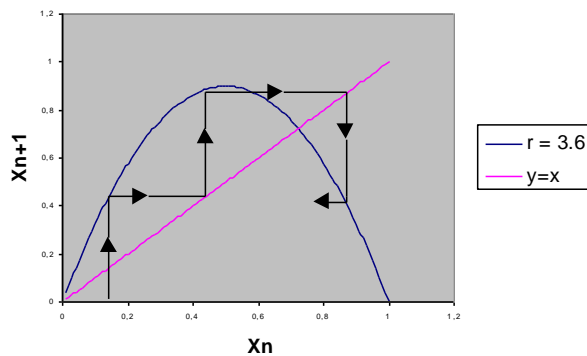
llama método de la fórmula recursiva. Este mapa [4] es unidimensional (1D). También se pueden hacer sistemas de mapas de mas de una variable.

El mapa logístico es:

$$x_{n+1} = r(x_n - x_n^2) \quad [5]$$

En la figura 1 vemos esta función y nos ayudamos de la recta $y = x$ para obtener x_n .

Figura 1: Telaraña en el mapa logístico



Este mapa de May (15) es muy famoso por ser uno de los mas simples que presenta caos para algunos valores del parámetro r . La intersección entre la parábola y la recta a 45° es el punto fijo correspondiente a $x^* = 1-1/r$.

Tiene aplicación en Biología ya que x_n podría representar la población de un organismo o de una especie animal a un determinado año. x_{n+1} sería el número de seres vivos de la especie en consideración del año siguiente y así sucesivamente. Si en la ecuación [5] prescindieramos del término cuadrático tendríamos, para $r > 1$ un crecimiento continuo en la población de año en año. r podría dar idea de la intensidad con que se reproducen. Sin embargo sabemos que al crecer la población de estos bichos podría suceder que no alcance la comida o que sean víctimas de un depredador. Por eso se agrega restando el término cuadrático en este modelo.

Pueden suceder varias cosas: que la población decaiga a cero con la muerte de todos; que se establezca en un número constante de individuos; que oscile de un modo periódico o que la población oscile caóticamente de año en año. Es una experiencia por todos conocida que la población de mosquitos es bastante caótica. En un año hay muchos en otros pocos, etc.



Pero veamos las características de la ecuación [5], según el valor de r . Para reiterar la ecuación [5] bastará poner la fórmula en un programa tan simple como el Excel. Incluso podremos graficar x_n en función de n .

Para valores de $r < 1$ la solución tiende a cero. Para valores de r entre 1 y 3 tenemos la tendencia a un valor constante asintótico (el punto fijo) después de un corto transitorio.

En la figura 2 hemos tomado $r = 2.2$ y el valor inicial es de 0.55. La solución tiende a 0.54545454...

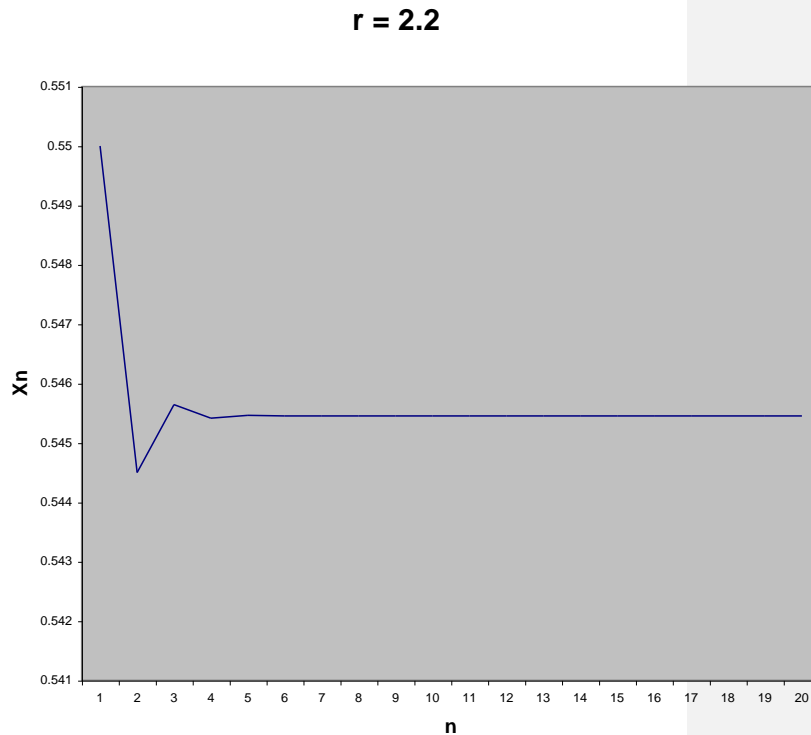


Figura 2: Órbita del mapa logístico que se estabiliza en el punto fijo



Ahora continuamos incrementando r hasta que llega al valor $r = 3$. Allí se produce una bifurcación que consiste en que para valores menores que 3 el mapa va, como vimos, a un valor constante; en cambio pasando 3 el sistema, después de un transitorio, oscila indefinidamente entre dos valores. Este valor asintótico es el punto fijo.

En la figura 3 tomamos $r = 3.2$ y partimos del valor 0.3. Después de un transitorio la solución oscila entre 0.51304451... y 0.79945549... Es un período 2 o un 2-ciclo.

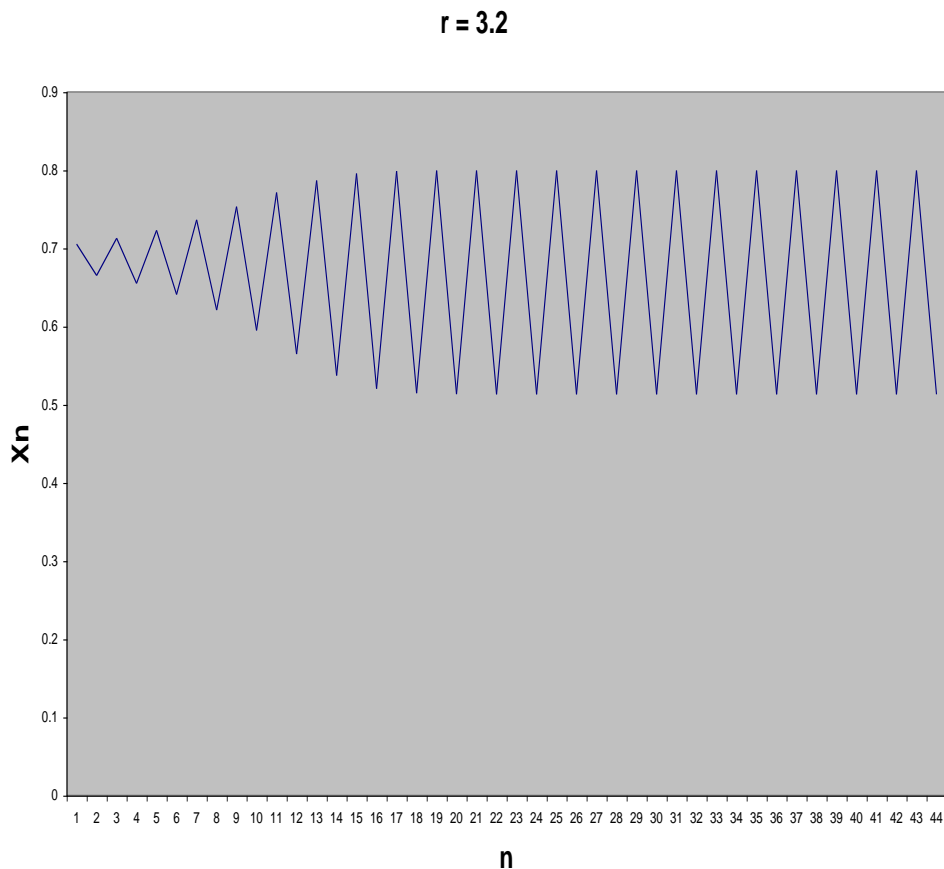


Figura 3: Órbita del mapa logístico que muestra un período 2



Si seguimos aumentando r para el valor $3.449\dots$ se produce una nueva bifurcación
Pasando de la órbita de período 2 a una órbita de período 4, ver figura 4.

$r=3.5$

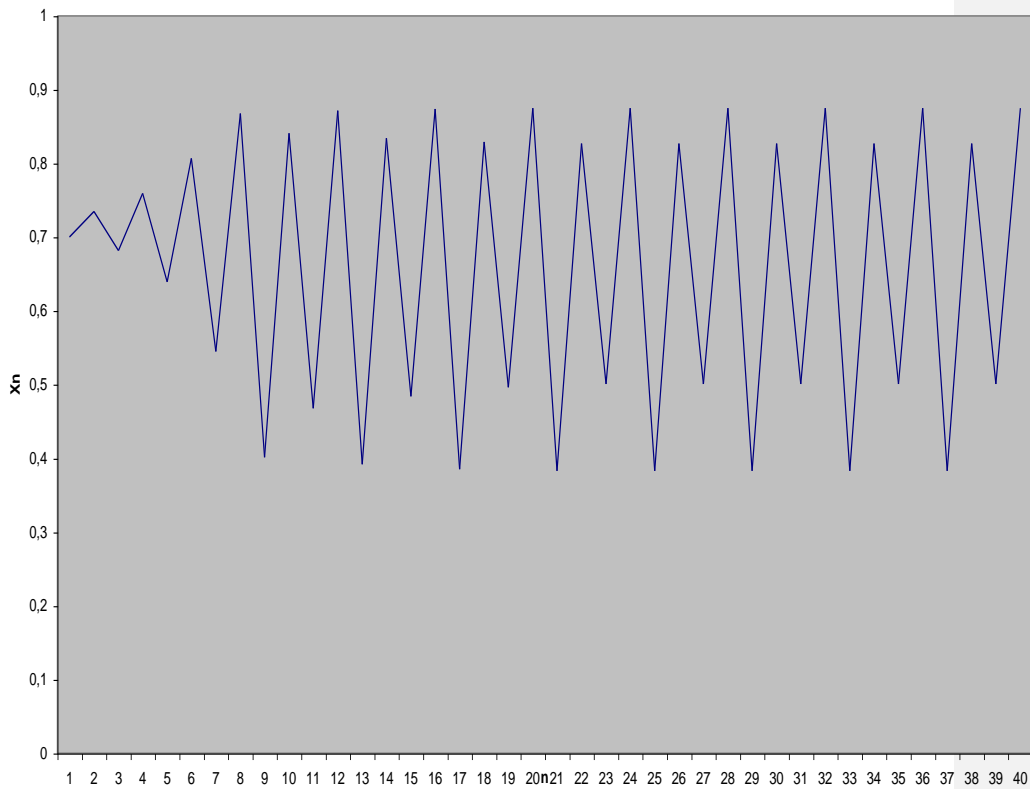
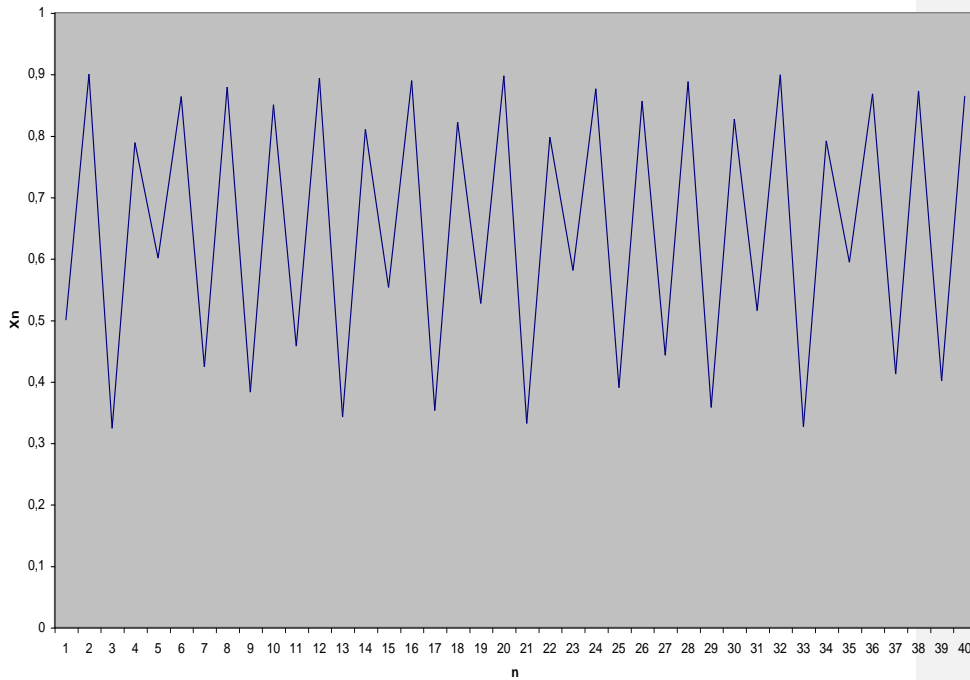


Figura 4: Observamos un 4-ciclo para el mapa logístico

Si seguimos aumentando r pasaremos a un 8-ciclo y así sucesivamente hasta el régimen caótico que se obtiene en $r = 3.57\dots$ En la figura 5 tomamos $r = 3.6$.



Figura 5; Caos en el mapa logístico

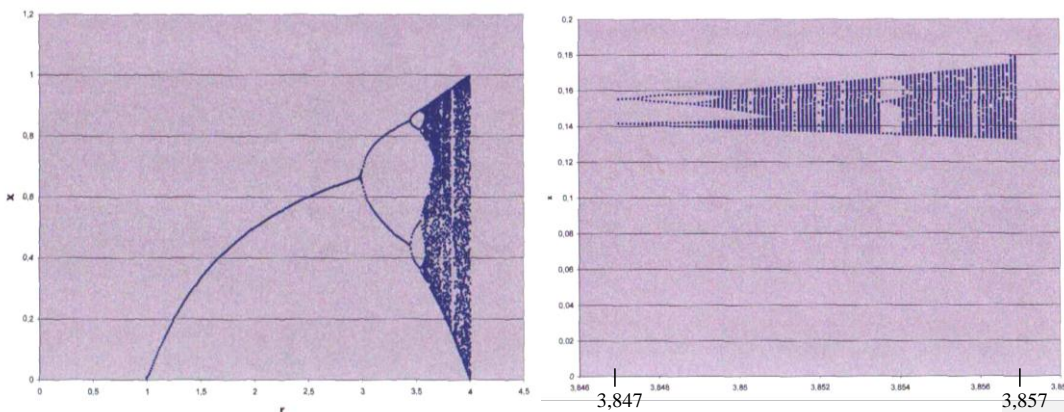


Ahora haremos el diagrama de bifurcación donde graficamos los 100 últimos puntos x_n para cada valor de r (Figura 6)

Figura 6: Diagrama de bifurcación y caos del mapa logístico

a) Diagrama de bifurcaciones

b) Detalle





Las zonas grises manifiestan el caos. Hay que destacar que dentro del caos hay ventanas periódicas. Por otro lado si en esas ventanas agrandamos el gráfico (figura 6b) se ve una estructura muy similar. Y este tipo de comportamiento lo podemos reiterar y así tenemos un fractal. Dedicaremos luego un capítulo a los fractales.

La posición de las diferentes bifurcaciones que son camino al caos están regidas por la ley de universalidad de Feigenbaum. La referencia (9) puede ayudarnos a introducirnos en ese tema.

Ya vimos que en el mapa logístico el punto fijo, además del trivial cero, estaba dado por $1 - 1/r$. En cuanto al 2-ciclo será solución del mapa doblemente iterado, obteniéndose:

$$\frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

Es importante saber que en cada bifurcación de este mapa aparecen dos nuevos puntos fijos estables pero se mantiene el punto fijo que les dio origen como inestable. Por tanto en el caos están presente infinitas órbitas periódicas inestables (ver punteado de figura 7).

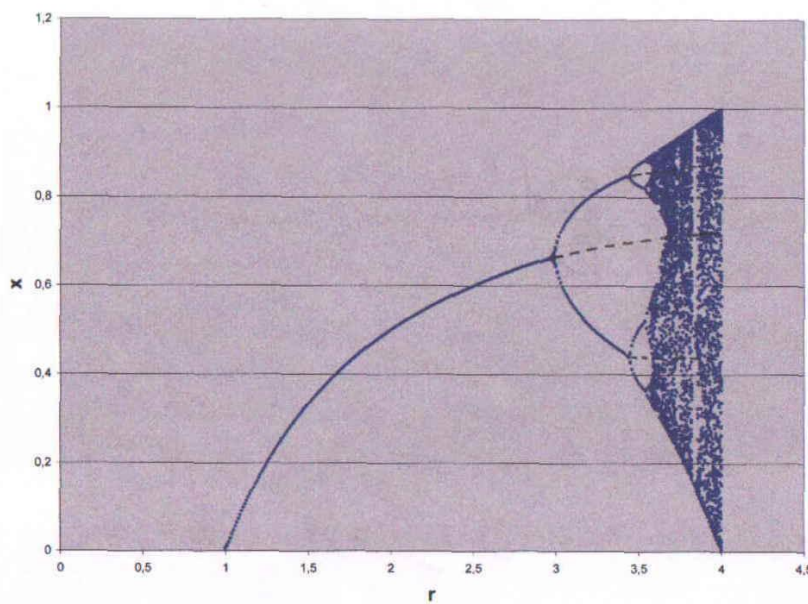


Figura 7: Los punteados son puntos fijos inestables que llegan a atravesar la zona caótica



EXPONENTE DE LIAPUNOV

Para tener una idea cuantitativa de la dependencia con las condiciones iniciales, sea x_0 el valor inicial y consideramos ora condición inicial muy próxima $x_0 + \delta_0$. O sea le agrego una pequeña diferencia.

Al cabo de n iteraciones la diferencia entre las dos órbitas δ_n la escribiremos como:

$$|\delta_n| \cong |\delta_0| e^{n\lambda}$$

donde λ es el exponente de Liapunov. Un exponente de Liapunov positivo significará caos.

Tras un poco de álgebra (9) puede demostrarse que

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right] \quad [6]$$

Este exponente rara vez puede calcularse analíticamente.

En el caso del mapa logístico hay que hacerlo numéricamente.

En cambio en el mapa "carpa" definido por

$$\begin{aligned} f(x) &= r x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ f(x) &= r - r x & 0.5 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad [7]$$

obtenemos inmediatamente

$$\lambda = \ln r \quad [8]$$

Es decir en el mapa carpa hay caos para $r > 1$.

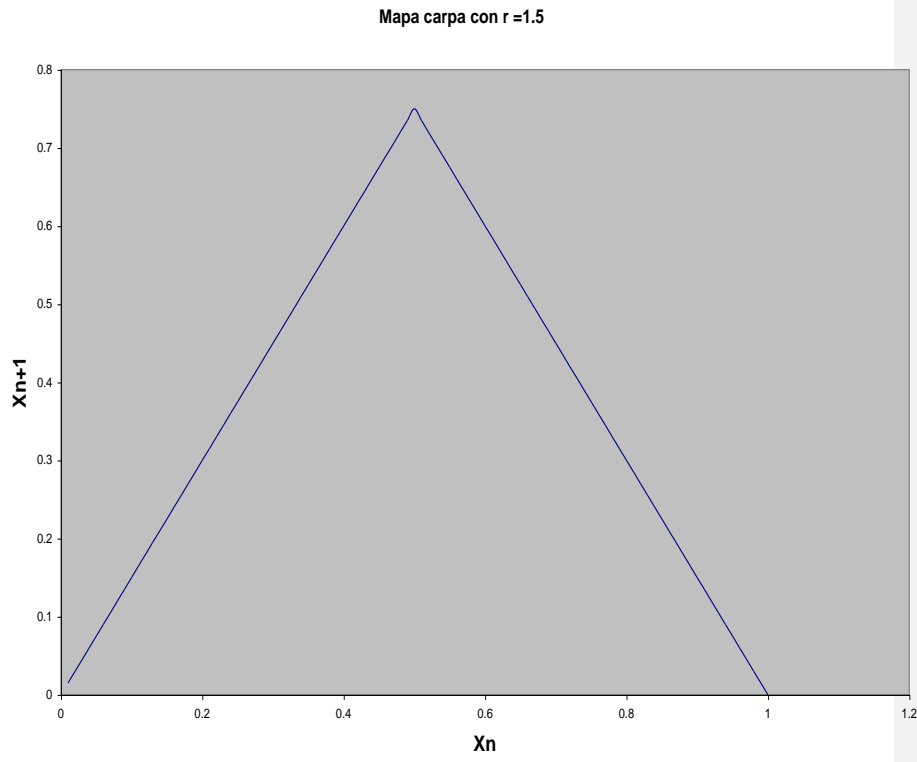


Figura 8



CAPÍTULO 2

CONTROL DEL CAOS

Ott, Grebogi y Yorke (OGY) de la Universidad de Maryland en 1990 publicaron un primer artículo (16) sobre el control del caos. A partir de entonces ha crecido el interés en el tema, especialmente por las aplicaciones: no siempre es deseable el comportamiento caótico. La estrategia OGY consiste en usar *pequeñas* perturbaciones de la órbita de modo que esta se estabilice en una de las órbitas periódicas inestables que existen en un atractor caótico como vimos ejemplificado en el caso del mapa logístico del capítulo anterior. La perturbación pequeña significa que los parámetros, apenas variados, corresponden al pleno caos que se va a controlar. Utilizaremos el simple mapa logístico con el fin de enseñar el control del caos, estabilizando la órbita: 1) En un punto fijo. 2) En un ciclo de período 2. (www.ciencia.cl/CienciaAlDia Nov. 2001)

Decíamos que desde 1990 se ha intentado el **control** del caos, porque **no siempre** es deseable el Caos. Por ejemplo un ingeniero que quiere una máquina que funcione a determinada frecuencia no le interesa que la misma entre en caos es decir un funcionamiento donde existe una distribución continua de frecuencias. Ott, Grebogi y Yorke son los pioneros en este tema del control. Su estrategia es estabilizar el sistema usando pequeñas variaciones al parámetro que gobierna el caos para estabilizar la órbita en un punto fijo o en una órbita periódica inestable presente en el seno del caos. La estrategia OGY sirve para controlar el caos permanente. Y ellos mismos han encontrado que a veces es deseable el caos, porque teniendo caos uno puede elegir, al controlar, el tipo de órbita periódica deseada.

Esto, en ingeniería, consistiría en la posibilidad de tener una máquina, que sin mayores cambios, trabaje en distintas frecuencias, en vez de diseñar varias máquinas distintas.

Cálculos

Para clarificar el método OGY lo aplicaremos a una de las más sencillas fórmulas de recurrencia que presentan caos: El mapa logístico [5] ya visto antes.



Entonces si tenemos pleno caos, por ejemplo $r = 3.78$, la idea OGY no es cambiar drásticamente el r hasta la zona periódica, ni siquiera hasta una ventana periódica cercana. Tratamos de controlar el caos con variaciones muy pequeñas de r **en plena zona caótica.**

La clave del método consiste en estabilizar la órbita (los X_n) en alguna de las infinitas órbitas inestables que hay dentro del atractor caótico. En particular controlaremos en el punto fijo inestable $1-1/r$ y la órbita de período 2 correspondiente a

$$\frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

Para el control hemos usado el método OGY simplificado por Flynn y Wilson (17). Es importante destacar que el genuino método OGY es más general que lo que veremos aquí, pero tiene la desventaja de acarrear mucho formalismo matemático. El método de Flynn y Wilson es muy didáctico.

A) Estabilización en un punto fijo:

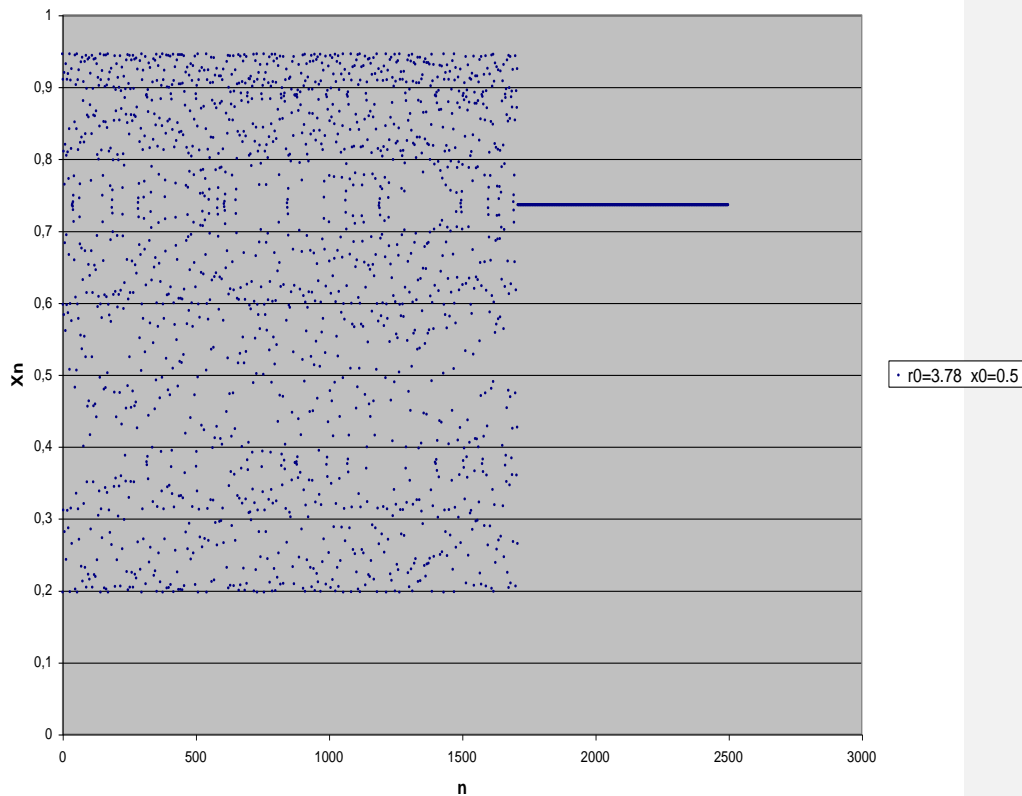
Para estabilizar la órbita en el punto fijo inestable $1-1/r$ procedemos esquemáticamente así:

- 1) $r_0 = 3.78$
- 2) Calcular X_n
- 3) Calcular $r_p = 1/(1 - X_n)$
- 4) Si $|r_p - r_0| < 0.01$ entonces $r = r_p$
- 5) Volver a 2)

Ver abajo programa en Basic y figura 1



Figura 1: Control del caos en un punto fijo

**B) Estabilización en un ciclo de período 2:**

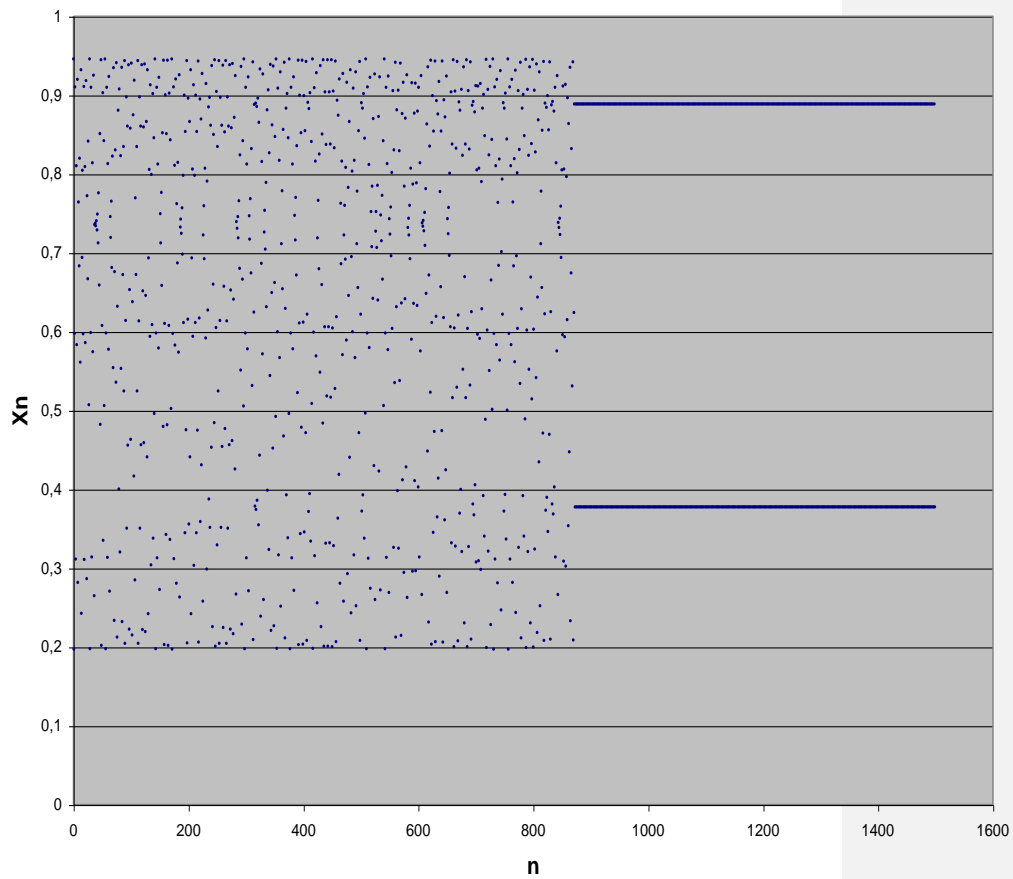
Para estabilizar la órbita en la órbita inestable de período 2 procedemos esquemáticamente así:

- 1) $r_0 = 3.78$
- 2) Calcular X_n
- 3) Calcular X_{n+1}
- 3) Calcular $r_p = X_n / (X_{n+1} - [X_{n+1}]^2)$
- 6) Si $|r_p - r_0| < 0.01$ entonces $r = r_p$
- 7) Volver a 2)

Ver abajo programa en Basic y figura 2



Figura 2: Control del caos en una órbita de período 2



Programas

```
'PROGRAMA PARA CONTROLAR EL CAOS EN UN PUNTO FIJO
OPEN "C:OGYLOG1.XLS" FOR OUTPUT AS #1
i=1
X=.5
```



```
r0=3.78
r=r0
1 X=r*(X-X^2)
PRINT #1 X
i=i+1
IF i>2500 THEN GOTO 3
rp=1/(1-X)
IF ABS(rp-r0)<0.01 THEN GOTO 2
GOTO 1
2 r=rp
GOTO 1
3 CLOSE #1
END
```

PROGRAMA PARA CONTROLAR EN UNA ÓRBITA DE PERÍODO 2
OPEN "C:OGYLOG2.XLS" FOR OUTPUT AS #1

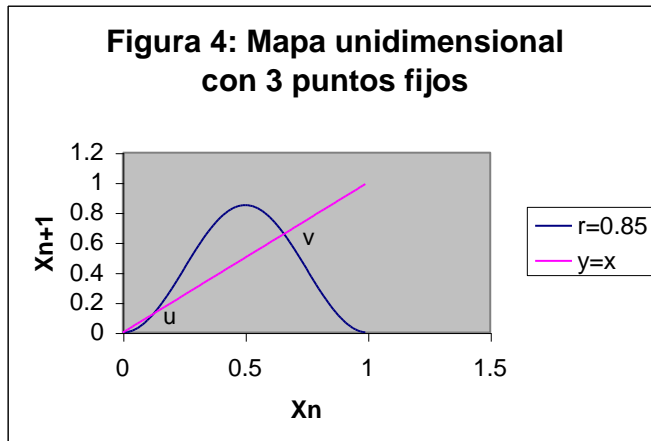
```
i=1
X=.5
j=0
r0=3.78
r=r0
1 X=r*(X-X^2)
PRINT #1 X
IF j=0 THEN GOTO 2
GOTO 3
2 X1=X
j=1
i=i+1
GOTO 1
3 X2=X
j=0
i=i+1
IF i>1500 THEN GOTO 5
rp=X1/(X2-X2^2)
IF ABS(rp-r0)<0.01 THEN GOTO 4
GOTO 1
4 r=rp
GOTO 1
5 CLOSE #1
END
```



Reflexiones sobre el control del caos

Hemos visto como controlar el caos llevándolo a un punto fijo o a una órbita periódica (2-ciclo). El método OGY permite así, en principio, estabilizar el caos en cualquier órbita periódica inestable elegida con un leve cambio del parámetro, entonces la **presencia de caos tiene mayor ventaja**. Físicamente significa que no debo rediseñar el experimento cambiando completamente el parámetro para tener una órbita de un tipo u otro, sino estando en el caos, puedo elegir fácilmente el sistema periódico que me conviene usando esta forma de control. Es mas, puedo pasar fácilmente de un comportamiento periódico a otro *buceando* dentro del caos y sin una alteración costosa del sistema. Esta flexibilidad "multipropósito" es esencial en las formas de vida más complejas, y podemos especular que el caos es un ingrediente necesario para la regulación del cerebro (16). Sin embargo debemos conocer antes la forma en que nuestro cerebro concibe los conceptos (18).

Para un buen "review" sobre el control del caos y su sus aplicaciones, ver la referencia (19).



Encontramos tres puntos fijos como muestra la figura 4 y los llamamos: 0, u y v . El cero es un punto fijo estable para la cuenca de condiciones iniciales $[0, u) \cup (1-u, 1]$. El punto fijo u depende de r y es siempre inestable. El punto fijo v también depende de r y pasará de ser estable a inestable cuando (9):

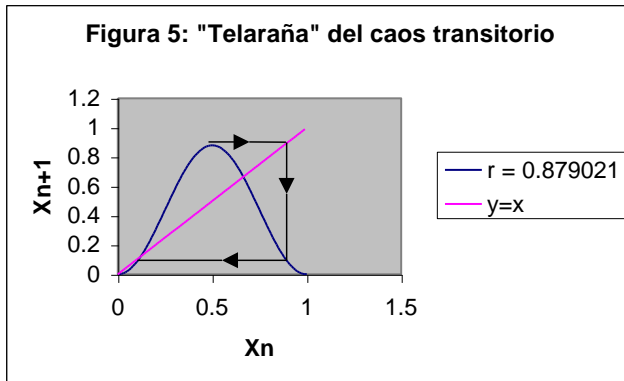
$$|f'(v)| = 1 \quad [10]$$

A partir de este punto tenemos la primera bifurcación y corresponde al valor $r=0.62\dots$ y análogamente al mapa logístico aumentando el r se obtiene una ruta al caos por bifurcaciones. A partir de $r=0.74\dots$ tenemos caos. En este caso el caos solo se da para las condiciones iniciales comprendidas en $(u, 1-u)$.

Sin embargo, se llega a un valor de r para el cual:

$$f(r) = u = 1 - r \quad [11]$$

Ver figura 5



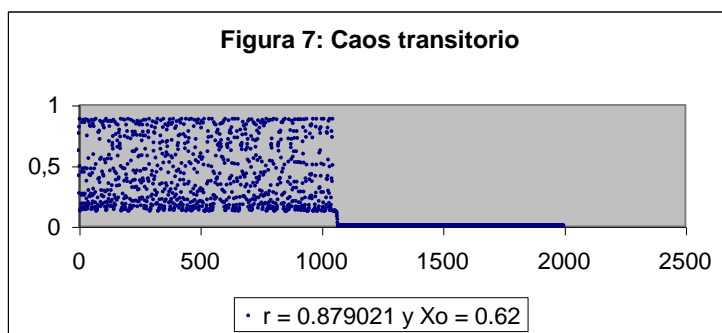
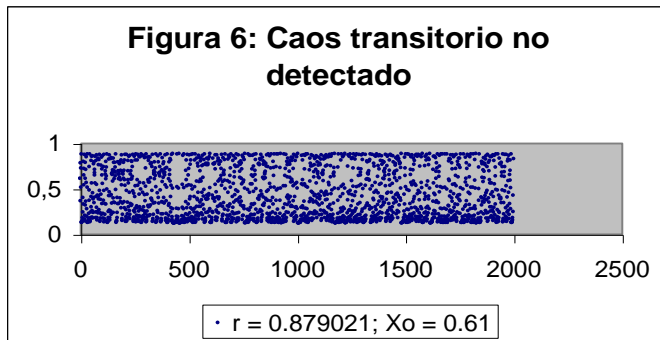
Obtener exactamente la condición 3 dependerá de la precisión del cálculo. Tomaremos dos casos, uno por exceso y otro por defecto:

$$\begin{aligned} r &= 0.879019 \\ u &= 0.120981 \\ f(r) &= 0.1209814 \end{aligned} \quad [12a]$$

En este caso tenemos caos real.
En cambio para:

$$\begin{aligned} r &= 0.879021 \\ u &= 0.12098 \\ f(r) &= 0.120978 \end{aligned} \quad [12b]$$

las órbitas que exploran puntos cercanos al máximo r pueden caer en la cuenca del 0, es decir $[0, u) \cup (1-u, 1]$, pero al haber pocos puntos que caigan en esta cuenca, la órbita puede ser larga y su aspecto es el del caos, aunque sabemos que se trata de caos transitorio. Dependiendo de la condición inicial el transitorio será mas o menos largo. La figura 6 muestra caos transitorio no detectado para $r = 0.879021$ y condición inicial $x_0 = 0.61$, hasta $n = 2000$ tenemos caos aparente. En la figura 7 para el mismo valor de r pero con $x_0 = 0.62$ la órbita cae a cero aproximadamente en 1075: Tenemos caos transitorio. Dependiendo de x_0 la órbita tarda mas o menos en caer a cero.



Unos resultados análogos se obtienen con el mapa asimétrico:

$$X_{n+1} = r (\cos(\pi X_n/2) - \cos^2(\pi X_n/2)) \quad [13]$$



Exponente de Liapunov para el caos transitorio

Mostraremos 4 casos de caos transitorio, en mapas 1D y para ellos computaremos el exponente de Liapunov con la fórmula [6].

Los mapas elegidos son los ya vistos:

a) Logístico $\lambda = +\infty$

b) Mapa carpa.... $\lambda = \ln r$ Este valor es independiente de si se trata de caos

permanente o transitorio ($r = 2 + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$)
, $\lambda > 0$

c) Mapa simétrico de la ecuación [9] : $\lambda = -\infty$

d) Mapa asimétrico de la ecuación [13] : $\lambda = -\infty$

Por lo tanto el exponente de Liapunov tal cual está definido no nos sirve para caos transitorio.

CONTROL DEL CAOS TRANSITORIO

En la última década existe abundante bibliografía basada en el trabajo de Ott, Grebogi y Yorke (OGY) (16) sobre el control del caos estabilizando la solución en un punto fijo inestable o en una órbita periódica inestable. Sin embargo la gran mayoría de estos trabajos se refieren al control del caos permanente, para el cual un buen review se encuentra en el libro de Chen y Dong (20).

Respecto al control del caos transitorio la literatura es más escasa y tenemos como ejemplos los trabajos de Tél (21) y de Place y Arrowsmith (22) y (23).

La idea fundamental de este trabajo consiste en mantener el criterio OGY de que el control del caos se logra usando **pequeñas** variaciones del parámetro p que rige el comportamiento del sistema, para estabilizarlo en un punto fijo inestable o en una órbita periódica inestable. Para el caso del caos transitorio cercano a la crisis tenemos $p > p_c$, donde p_c corresponde a la crisis (la diferencia $p - p_c$ es pequeña).



Controlar el caos transitorio sería variar p de modo tal que $|\Delta p| < p - p_c$ (Óptimo $|\Delta p| \ll p - p_c$). Si no fuera así ya no estaríamos en la "situación física" de caos transitorio, sino que se nos permitiría pasar al caos permanente para allí controlar. Viéndolo desde el punto de vista opuesto: con una variación permitida de p tan grande seríamos capaces de llevar el sistema desde el caos permanente al transitorio y sin necesidad de buscar puntos fijos u órbitas inestables estaríamos controlando el caos permanente.

El criterio OGY no tiene sentido si podemos variar p hasta la zona no caótica. El criterio de OGY hace muy pequeñas variaciones de p estabilizando el sistema en valores de p que están en pleno caos. Del mismo modo estabilizar el caos transitorio debería consistir en variaciones de p en la misma zona de caos transitorio.

Teniendo esto en mente sabemos vemos en la literatura (21) que el transitorio cerca de la crisis tiene un largo promedio $\langle \tau \rangle \sim (p - p_c)^{-\gamma}$. Esta misma fórmula se aplica al control del caos permanente (16), es decir el tiempo que se tarda en controlar el caos $\langle \tau \rangle \sim |\Delta p|^{-\gamma}$.

En nuestro caso tenemos las dos situaciones. Tenemos un caos transitorio que puede escapar de su atractor al mismo tiempo que lo estamos controlando. Por tanto la órbita terminará por escapar o ser controlada. En vista de la condición $|\Delta p| < p - p_c$ (Óptimo $|\Delta p| \ll p - p_c$) parecería que la situación de escape es más probable que la de control y por tanto el control del caos transitorio tendría baja probabilidad. Esto es solo una conjetura pues no conocemos la fórmula general del exponente γ . Es mas, no sabemos de la diferencia de γ entre el escape y el control. Tél (21) argumenta que el tiempo para lograr control en caos transitorio es constante y del orden de magnitud de la vida media del transitorio.

Es este trabajo probamos la validez de la conjetura de baja probabilidad de control del caos transitorio en el caso particular de un experimento numérico usando el mapa logístico cerca de la crisis:

$$X_{n+1} = (4 + \delta) \cdot (X_n - [X_n]^2)$$

Donde $p_c = 4$, $\delta = p - p_c > 0$, $\varepsilon = |\Delta p|$, donde Δp es la variación del parámetro $p = 4 + \delta$ para controlar la órbita estabilizándola en el punto fijo $1-1/p$.



De acuerdo al criterio de pequeñas variaciones hemos tomado $\varepsilon \leq \delta$. En los cálculos usamos $\varepsilon = \delta, \delta/10, \delta/100$.

El experimento numérico usa el método de control de Flynn et al. (6) basado en la estrategia OGY. Utilizamos 10000 condiciones iniciales "random" para cada par δ, ε y calculamos la probabilidad de escape o control. El escape se dará cuando $x_n > 1$ y el control cuando $p_n = 1/(1 - x_n)$ difiera de p en menos de ε .

Los resultados los podemos ver en la tabla:

δ	ε	Escape	Control	Nº de fallas
10^{-1}	10^{-1}	0.957	0.043	0
10^{-1}	10^{-2}	0.9959	0.0041	0
10^{-1}	10^{-3}	0.9998	0.0002	0
10^{-2}	10^{-2}	0.986	0.0138	2
10^{-2}	10^{-3}	0.998	0.0018	2
10^{-2}	10^{-4}	0.9998	0.0002	0
10^{-3}	10^{-3}	0.9955	0.0045	0
10^{-3}	10^{-4}	1	0	0
10^{-3}	10^{-5}	1	0	0

Vemos que la probabilidad de control es bajísima y decrece con δ y ε . Estos cálculos cambiando la secuencia de números random tienen un error máximo en la probabilidad de 0.002. Hemos permitido un número máximo de iteraciones de 1000000 y de acuerdo a las distintas series random se obtienen entre 4 (presente) y 7 casos entre las 10000 condiciones iniciales donde la órbita alcanza el 1000000 de iteraciones sin escape ni control.

Por último, mirando la literatura de control de caos transitorio podemos decir que Place et al (22) obtienen en algunos casos altas probabilidades de control en el caso del caos transitorio, en el mapa "carpa", porque ellos no toman en cuenta el criterio de pequeñas variaciones para el control. Ese trabajo considera que hay control cuando la órbita entra en un intervalo de longitud arbitrariamente largo conteniendo el punto fijo, lo que equivale a grandes variaciones de p .

La longitud equivalente de control en el segmento $[0,1]$ para el presente trabajo es aproximadamente $\varepsilon/16$ mientras que la condición de escape es aproximadamente $\delta^{1/2}/2$.



CAPÍTULO 3

FLUJOS EN UNA DIMENSIÓN. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. PUNTOS FIJOS. ESTABILIDAD

Tratamos con la ecuación en una sola variable x :

$$\dot{x} = f(x) \quad [14]$$

Donde f puede ser muy complicada (12). La gráfica de la ecuación [14] podría ser:

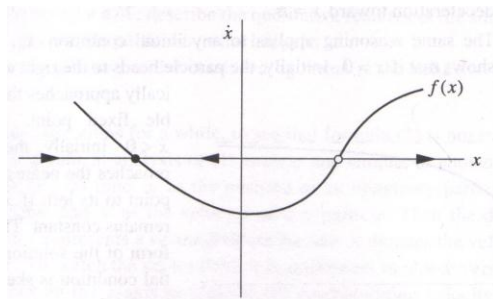


Figura 1

Si bien no conocemos la solución analítica podemos decir hacia donde evoluciona x de acuerdo al signo de la derivada. En este caso has dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable. Llamamos puntos fijos a aquellos cuya derivada es cero. Si estoy en el punto fijo exactamente no me muevo ni para la izquierda ni para la derecha. El punto fijo es estable, cuando, al correrme ligeramente de él, el sistema vuelve al punto. Al contrario si me corro un poquito de un punto fijo inestable el sistema se aleja de él buscando al punto estable más cercano

Circuito RC (12):

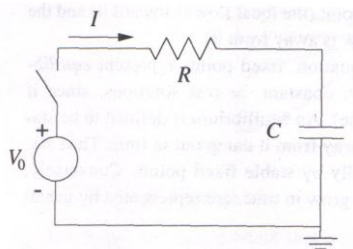


Figura 2



R es la resistencia y C el capacitor. Si en el $t = 0$ conectamos el circuito, con un voltaje constante V_0 , estando inicialmente descargado en condensador se irá acumulando carga en este, la cual notamos con $Q(t)$. Este problema es lineal y tiene solución analítica, pero queremos hacer aquí la interpretación geométrica:

$$-V_0 + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

reordenado:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}$$

graficando:

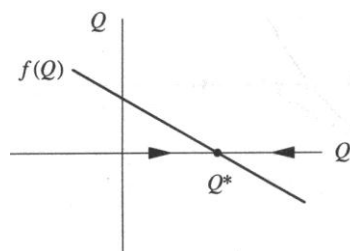


Figura 3

El punto fijo es estable. Más aun es globalmente estable en el sentido que a él van todas las condiciones iniciales.

Análisis de la estabilidad lineal

Vimos como distinguir la estabilidad de los puntos fijos con el método geométrico. Para tener una idea más cuantitativa de la estabilidad *linearizaremos* alrededor del punto fijo. (9)

Sea x_{PF} la posición del punto fijo

Agregaremos una pequeña perturbación η definida por:

$$\eta(t) = x(t) - x_{PF}$$

$$d\eta/dt = dx/dt = f(x) = f(x_{PF} + \eta)$$



Desarrollando en serie de Taylor:

$$f(x_{PF} + \eta) = f(x_{PF}) + \eta f'(x_{PF}) + O(\eta^2).$$

donde $O(\eta^2)$ denota términos cuadráticos en η , que pueden despreciarse. Finalmente queda:

$$d\eta/dt = \eta f'(x_{PF})$$

vemos entonces que la perturbación crece exponencialmente si $f'(x_{PF}) > 0$ y decrece si $f'(x_{PF}) < 0$. Entonces la derivada de f en el punto fijo determina la estabilidad y su valor dará la rapidez del acercamiento o alejamiento del punto fijo.

Otros ejemplos [\(12\)](#) propuestos al lector:

$$(a) \quad \dot{x} = -x^3 \quad (b) \quad \dot{x} = x^3 \quad (c) \quad \dot{x} = x^2 \quad (d) \quad \dot{x} = 0$$

BIFURCACIONES. TIPOS DE BIFURCACIONES. BIFURCACIONES IMPERFECTAS

La bifurcación Saddle-node:

En ella se crean o destruyen puntos fijos:

$$\dot{x} = r + x^2 \quad [15]$$

Según el valor del parámetro r tendremos:

Si $r < 0$ hay dos puntos fijos uno estable y otro inestable

Si $r = 0$ hay un solo punto fijo en parte estable y en parte inestable

Si $r > 0$ no hay puntos fijos.

Ver figura 4

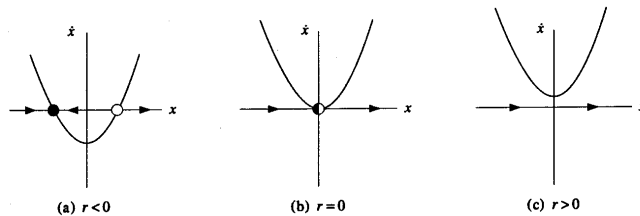


Figura 4



Graficando la posición de los puntos fijos en función de r tendremos:

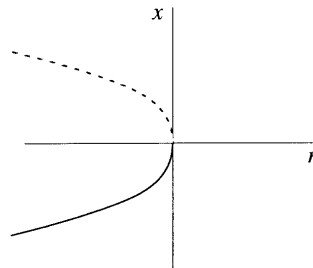


Figura 5

Bifurcación transcítica:

Se trata de una bifurcación donde no se crean ni destruyen puntos fijos pero si cambian de estabilidad al variar el parámetro r (12)

Usamos la ecuación

$$\dot{x} = r x - x^2 \quad [\quad]$$

16

Ver figura 6

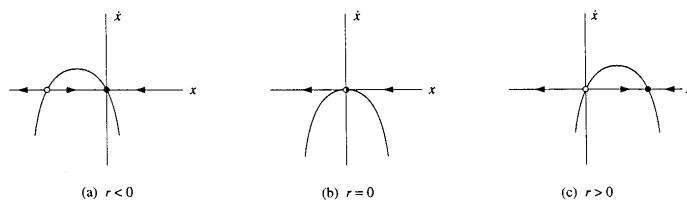


Figura 6

Graficando ahora la posición de los puntos fijos en función de r tendremos la figura 7

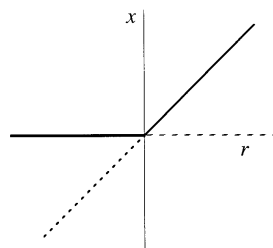


Figura 7

**Bifurcación tenedor:**

Será una bifurcación tenedor supercrítica (9) en el caso en que escribamos:

$$\dot{x} = r x - x^3 \quad [17]$$

Ver figura 8:

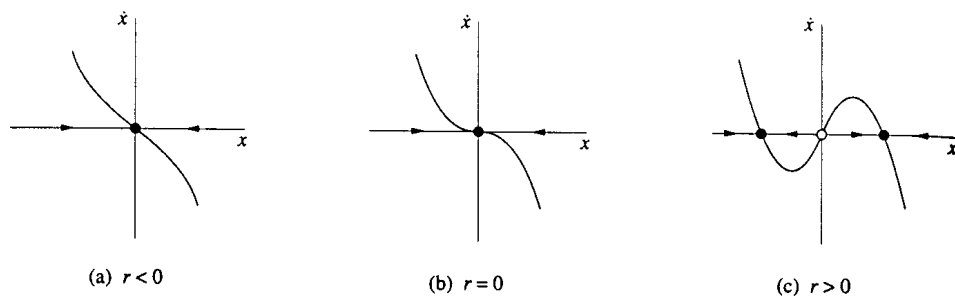


Figura 8

Si graficamos los puntos fijos en función de r tendremos la figura 9:

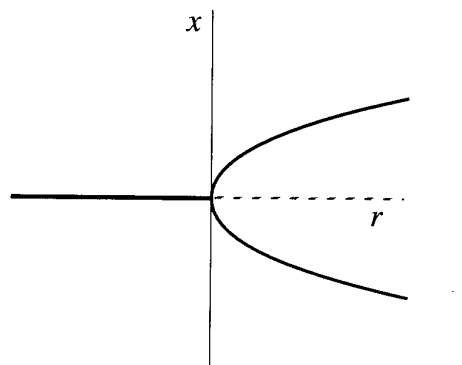


Figura 9



Como aplicación a la física de la bifurcación teneor supercrítica pensemos en un ejemplo de convección. Una lámina de líquido es calentada desde abajo según figura 10:

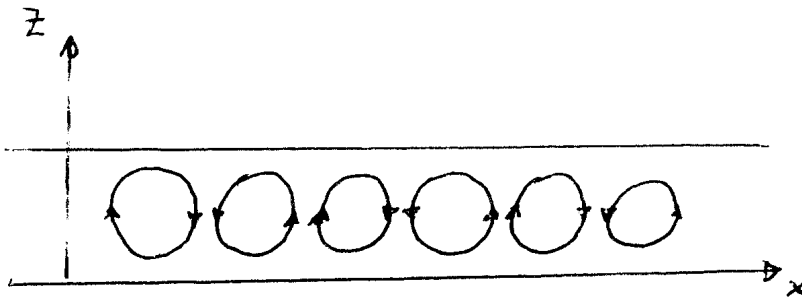


Figura 10

Al principio tendremos conducción, hasta que la temperatura llegue a un valor crítico T_c . Proponiendo un perfil de temperaturas θ :

$$\theta(z = h/2, x, t) = A \cos kx + c \quad [18]$$

y modelamos el comportamiento temporal de A de la siguiente manera:

$$\dot{A} = \frac{T - T_c}{T_c} A \quad [19]$$

Si $T < T_c$ tendremos una exponencial decreciente hacia el punto fijo $A = 0$ y este modelo representa bien la conducción

Pero para $T > T_c$, A diverge. Algo falla. El problema es que la ecuación [19] representa solo Arquímedes y es necesario considerar un término de rozamiento entre los rollos de la convección. Mejoramos el modelo cambiando la ecuación [19] por:

$$\dot{A} = \left[\left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) - \rho A^2 \right] A \quad [20]$$

Los puntos fijos son:



$A = 0$ para $T < T_c$, caso de la conducción

y

$$A = \pm \sqrt{\frac{T - T_c}{T_c \rho}} \quad [21]$$

para $T > T_c$, es decir la convección queda mejor modelada y es un ejemplo de bifurcación tenedor supercrítica según muestra la figura 11:

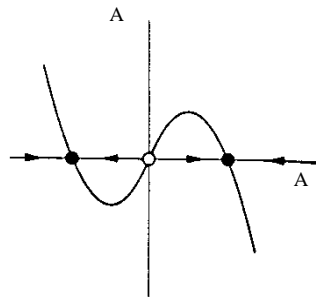


Figura 11(a)

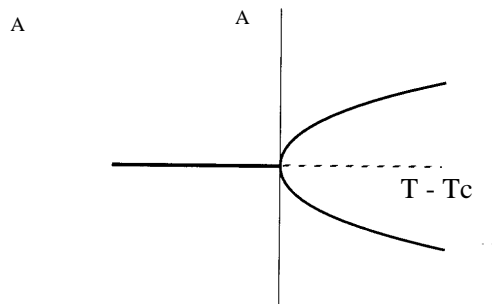


Figura 11(b)

Tendremos bifurcación tenedor subcrítica [\(12\)](#) en el caso:



Podemos ver varios tipos de gráficos. En la figura 14 vemos h vs. r , indicando la zona donde hay un punto fijo y la zona donde hay tres:

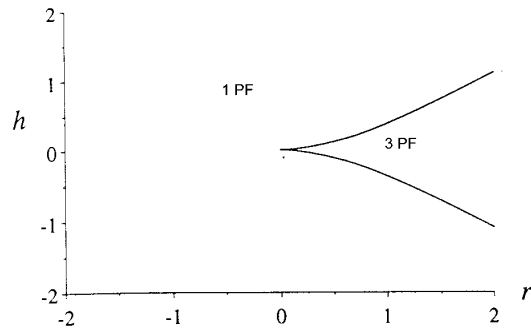


Figura 14

Volviendo a nuestros diagramas de los puntos fijos en función de r vemos como se deforma el tenedor al ser $h \neq 0$, en la figura 15:

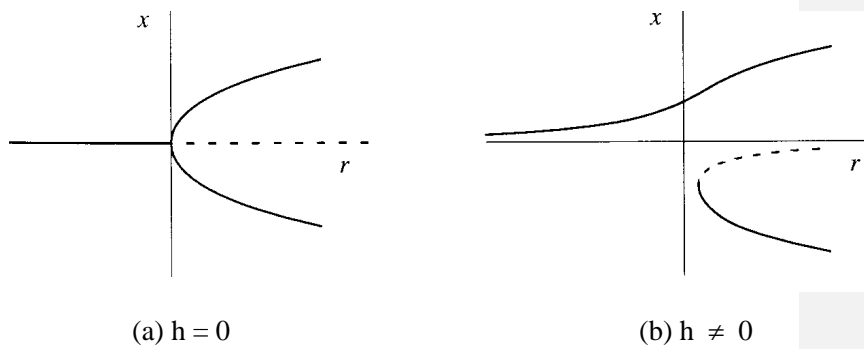


Figura 15

También podemos graficar la posición de los puntos fijos en función de h para los casos $r \leq 0$ y $r > 0$ en la figura 16:

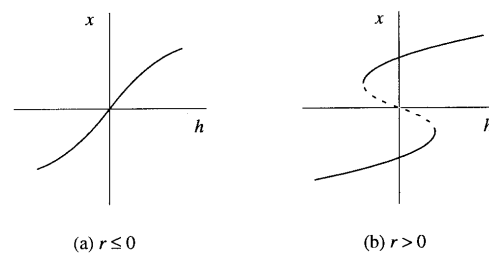


Figura 16



Por último es muy instructivo mostrar un gráfico 3D donde los ejes son r , h y x . En la figura 17 vemos una especie de plano doblado llamado "superficie de catástrofe". El término catástrofe se debe a que en la zona del doblé, al ir disminuyendo h por ejemplo el sistema de puntos fijos pega un salto. Ver figura 18.

Será una verdadera catástrofe si sucede algo así en el equilibrio de un puente o de una determinada construcción.

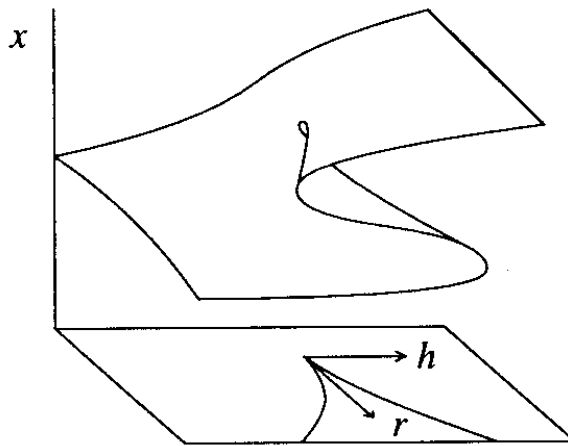


Figura 17

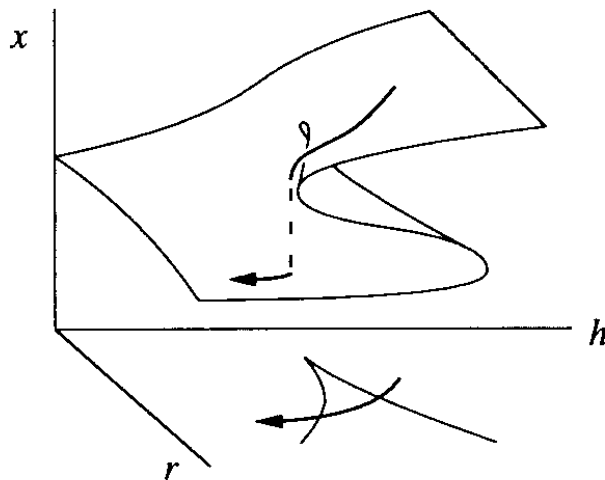


Figura 18



CAPÍTULO 4

FLUJO EN EL CÍRCULO. FANTASMA Y CUELLO DE BOTELLA.

Trataremos con la ecuación del tipo:

$$\dot{\theta} = f(\theta) \quad [24]$$

Aquí θ es un ángulo correspondiente a un punto del círculo. Bajo cierto aspecto es semejante al flujo visto en x . Sin embargo el flujo en el círculo lo podemos ver como el más sencillo de los sistemas que pueden oscilar, ya que pueden volver a su posición inicial después de una vuelta [\(9\)](#).

Oscilador uniforme:

Lo definimos como

$$\dot{\theta} = \omega \quad [25]$$

donde ω es la velocidad angular o frecuencia angular. La solución:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

la solución es periódica con un período $T = 2\pi/\omega$.

Oscilador no uniforme:

La ecuación:

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta \quad [26]$$

Aparece en electrónica (phase-locked loops), en biología (neuronas oscilantes), en materia condensada (juntura Josephson) y en mecánica (péndulo sobreamortiguado con torque externo constante).

Para el caso $a < \omega$, tenemos una oscilación donde el flujo es más rápido en la zona baja y más lento en la zona alta. Ver figuras 1a y 2a.

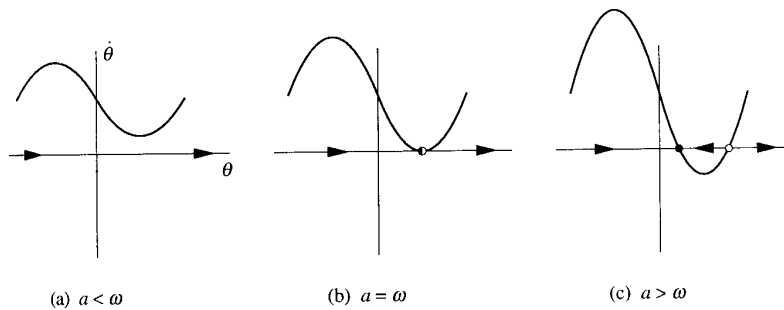


Figura 1

Para a acercándose a ω tenemos un cuello de botella en la zona alta. Esta zona es atravesada con gran lentitud para luego pasar muy rápidamente por el resto del círculo.

Para $a = \omega$ aparece un punto fijo mitad estable mitad inestable y nace una bifurcación del tipo saddle-node. Ver figuras 1b y 2b.

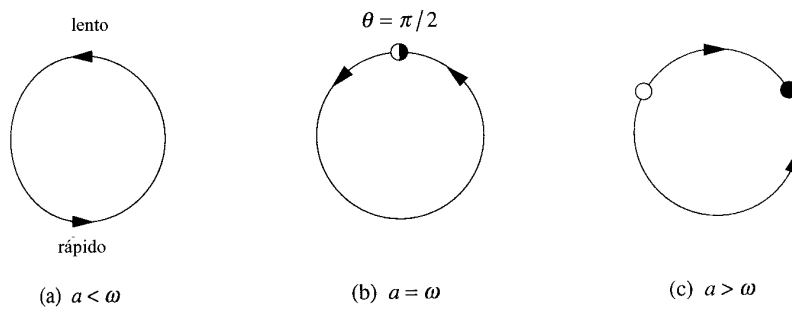


Figura 2

Para $a > \omega$ tendremos dos puntos fijos. Uno estable y el otro inestable (aparición de saddle-node). Ver figuras 1c y 2c.

Período de oscilación

Para $a < \omega$ calculamos el período como:



$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta \quad [27]$$

Obteniéndose

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \quad [28]$$

que graficamos en la figura 3:

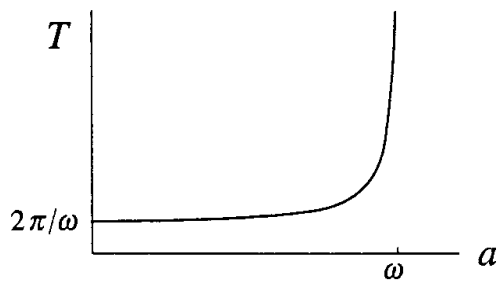


Figura 3

Podemos decir que T tiende a infinito al acercarse a al valor ω . Este es el remanente del saddle-node o fantasma.

Se verá bien en las figuras 4 y 5:

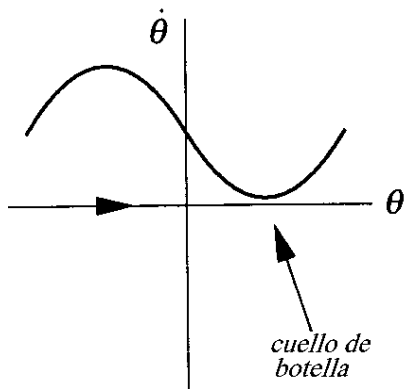


Figura 4

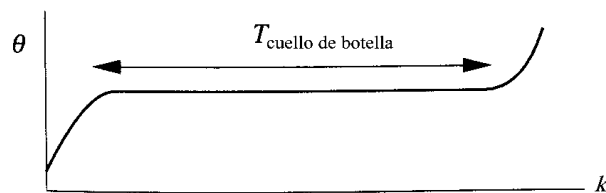
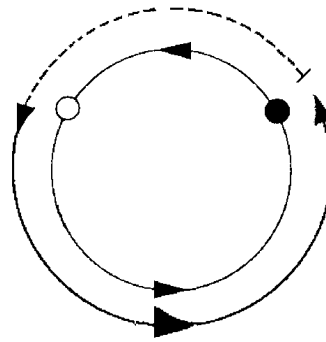
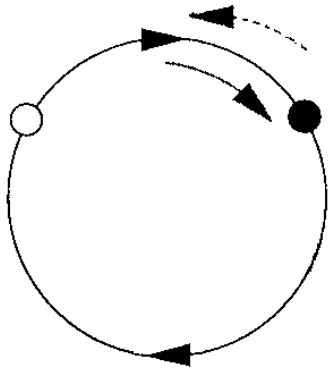


Figura 5



EL NERVI

Está demostrado que si uno estimula una neurona con una pequeña perturbación, todo vuelve a la normalidad. Pero superando cierto "umbral" la neurona reacciona con una gran variación del potencial eléctrico. Por eso el oscilador no uniforme con dos puntos fijos (caso $a > \omega$) sirve como modelo de la respuesta del nervio. Partamos del reposo (punto fijo estable), hagamos una perturbación moviendo el punto un poco hacia el punto fijo inestable y dejemos ver que sucede. El sistema vuelve por el mismo camino al punto fijo estable. Pero si la perturbación supera un cierto umbral, es decir se pasa del punto fijo inestable, el sistema pegará la vuelta a todo el círculo, es decir una gran respuesta. Dicho de otra forma hará un gran recorrido en el espacio de las fases.



(a) el estímulo menor que
mayor que
el umbral (- - - - ->)
)
respuesta (———>)
)

(b) el estímulo
el umbral (- - - - ->)
respuesta (———>)

Figura 6



CAPÍTULO 5

SISTEMAS LINEALES. ESPACIO DE LAS FASES.

CLASIFICACIÓN.

Un sistema lineal, como lo vimos en el capítulo 1, ecuación [2], vendría dado por

$$\dot{x} = Ax \quad [29]$$

Donde x es un vector de n componentes, $x \in \mathbf{R}^n$; el punto sobre la x significa derivada respecto al tiempo y A es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Aquí \mathbf{R} son los números reales. El origen es siempre punto fijo.

La solución de la ecuación [29] es:

$$x(t) = e^{At} x(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n / n! \right) x(0) \quad [30]$$

Sin embargo esto es muy difícil en general de llevarlo a la práctica (7). Una forma de simplificarlo es hacer un cambio de coordenadas de forma tal que me quede una matriz diagonal. Esto se puede hacer siempre que encontremos n autovectores linealmente independientes.

Cuando eso no es posible podemos, al menos, llevar la matriz a la forma de Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

Donde

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i \varepsilon_i & & 0 \\ & \lambda_i \varepsilon_i & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i \varepsilon_i \end{pmatrix}$$

Con ε_i es 1 o 0



Entonces todo se reduce a resolver por bloques de Jordan:

$$J_i = \lambda_i U + \Delta$$

Aquí U es la matriz unidad y Δ es la matriz nilpotente:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Con la ventaja de que $\Delta^n = 0$. Entonces

$$e^{\Delta t} = U + \Delta t + \frac{\Delta^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\Delta^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Puede verse que esta suma nos lleva a la matriz:

$$e^{\Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & t^2/2 & \\ & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & t^2/2 \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

entonces para construir la solución del bloque debo calcular el producto de matrices:



$$e^{Jt} = e^{\lambda_i t U} e^{\Delta t} \quad [31]$$

Ya veremos mas adelante un ejemplo.

Una vez conocido el proceso en general, nos restringimos a dos dimensiones. Es decir que necesito saber el valor de dos magnitudes solamente para conocer el estado del sistema. Esto podrá graficarse en un grafico plano de dos dimensiones. A este gráfico lo llamamos espacio de las fases. Cuando teníamos el flujo en 1D bastaba decir hacia donde iba el sistema estando en un determinado punto. Una consecuencia de los casos 1D es que no podía haber oscilación. El flujo salía de los puntos fijos inestables y moría en los estables. El retrato de fases en 2D significa dar en cada punto del plano cual es la evolución posterior del sistema. Por eso los retratos de fase son líneas que no pueden cortarse, (si no, habría dos futuros).

La diagonalización de una matriz de 2×2 , equivale a resolver el problema de autovalores y autovectores siguiente

$$A v = \lambda v \quad [32]$$

Donde λ es un número complejo y se llama autovalor, v en esta ecuación es un autovector.

Antes de seguir veamos que pasar de la ecuación [29] a la [32] es suponer que yo puedo escribir

$$x(t) = e^{\lambda t} v$$

Esto es suponer un flujo en la dirección v y λ esta relacionado con la velocidad del crecimiento exponencial en esa dirección $v \neq 0$. Sin embargo como la matriz es real, si los autovalores tienen parte imaginaria los autovectores también imaginarios y no posible ponerla en su forma de Jordan y por lo tanto tampoco diagonalizarla. En estos casos no hay direcciones v reales privilegiadas. Luego veremos que el retrato de fase en estos casos son elipses o espirales.

Debo resolver: la ecuación [32]:

$$\det(A - \lambda U) = 0 \quad [33]$$



Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad [34]$$

Expandiendo el determinante de la ecuación [33]:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \det(A) = 0 \quad [35]$$

Donde la traza de A es:

$$\tau = a + d$$

y el determinante de A es:

$$\det(A) = ad - bc$$

La solución de [35] será:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\det(A)}}{2} \quad [36]$$

La situación más típica es que haya dos soluciones distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$, el álgebra lineal nos dirá entonces que habrá dos autovectores distintos v_1 y v_2 linealmente independientes. Puedo representar todo el plano con una combinación lineal de estos dos autovectores. En particular la condición inicial puede escribirse:

$$x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

y la solución para todo tiempo, será:



$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \quad [37]$$

Usemos el primer ejemplo [\(9\)](#) donde

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad [38]$$

Los autovalores son:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

Los autovectores son:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución será

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Donde los coeficientes c_i dependen de las condiciones iniciales.

A este tipo de solución llamamos punto saddle o de ensilladura y el retrato de fases de la figura 1 muestran dos direcciones rectas generadas por los autovectores. Una de ellas es la rama estable y la otra la rama inestable.

Todas las demás direcciones en que puede evolucionar el sistema cumplen que para tiempos $-\infty$ se acercan a la rama estable, mientras que para tiempos $+\infty$ tienden a la rama inestable.

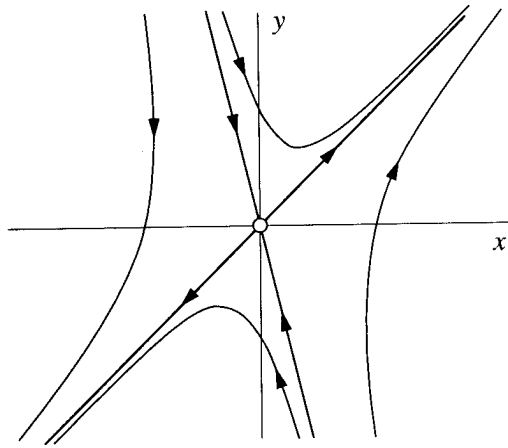


Figura 1

Es fácil ver que los saddle corresponden al caso $\det(A) < 0$.

Para el caos $\det(A) > 0$ si tengo dos autovalores reales del mismo signo tendré nodos estables ($\tau < 0$) o inestables ($\tau > 0$), ver figuras 2a y 2b; y si los autovalores son complejos tendré espirales estables ($\tau < 0$) o inestables ($\tau > 0$), ver figura 3a y 3b.

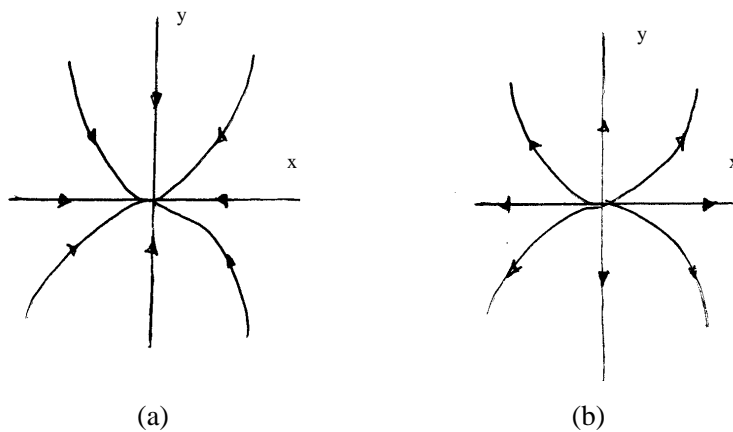


Figura 2



Figura 3

Ahora analicemos los casos que nos faltan. Por un lado el caso de un solo autovalor, o sea $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Para este caso puede haber dos posibilidades: que haya dos autovectores, en ese caso cualquier dirección es autovector y tendremos estrellas estables ($\tau < 0$) o estrellas inestables ($\tau > 0$). Ver figuras 4a y 4b.

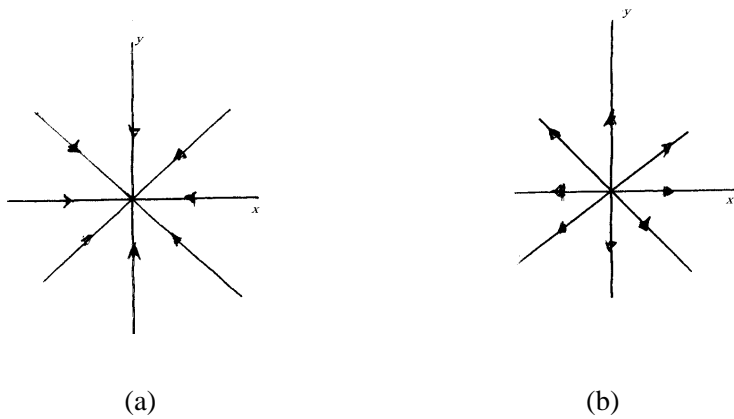


Figura 4

La otra posibilidad es que haya un solo autovector es el caso de la matriz:



$$A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Como caso particular es interesante resolverlo para hacer uso de lo visto al principio del capítulo.

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo interesante de este caso es que ya tiene la forma de Jordan.

$$e^{A t} = e^{U t} \times e^{\Delta t}$$

$$e^{A t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Entonces la solución queda:

$$x = x_0 e^t + y_0 t e^t$$

$$y = y_0 e^t$$

El retrato de la fase se ve en la figura 5. A estos casos se los llama nodos de Jordan o nodos degenerados.

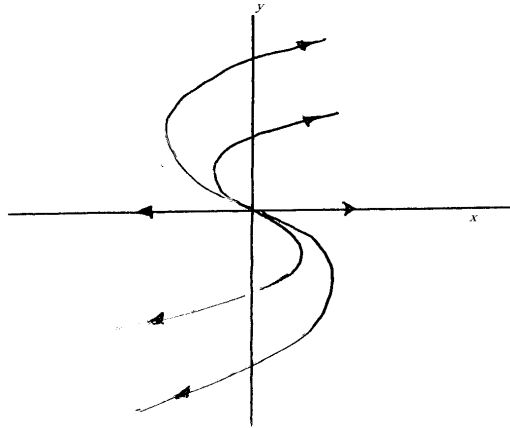


Figura 5

Otro caso sería el que tiene un autovalor cero y el otro distinto de cero. En ese caso uno de los ejes esta formado por una infinitud de puntos fijos no aislados, ver figura 6
Es llamado nodo singular

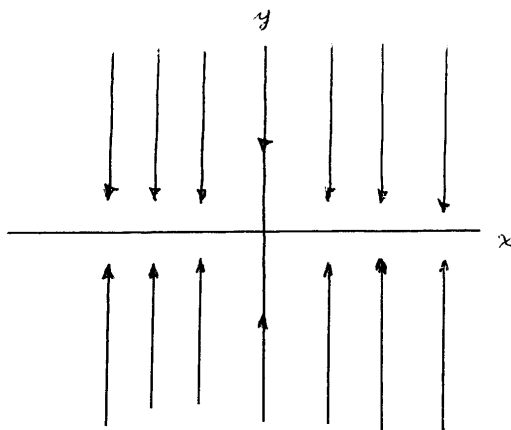


Figura 6

En otro caso tenemos una matriz con traza y determinante cero del tipo:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A este caso lo llamamos singularidad nilpotente. Ver figura 7

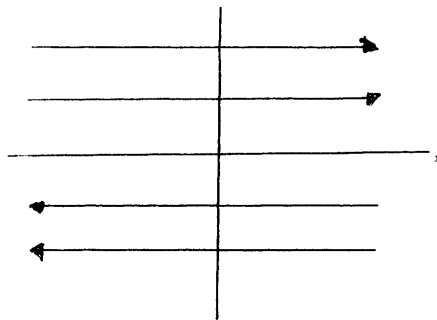


Figura 7

El oscilador armónico

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\omega^2 x \quad [39]$$

Los autovalores son puramente imaginarios $\pm i \omega$

En este caso el espacio de las fases está formado por los ejes x , v donde v es la velocidad. Del análisis de las ecuaciones [39] resulta que el retrato de las fases, sobre los ejes, tiene un flujo perpendicular a ellos. Graficando otros puntos llegamos a la figura 8. A este caso se le llama "centros" que no son más que elipses del tipo:

$$\omega^2 x^2 + v^2 = C$$

con $C \geq 0$

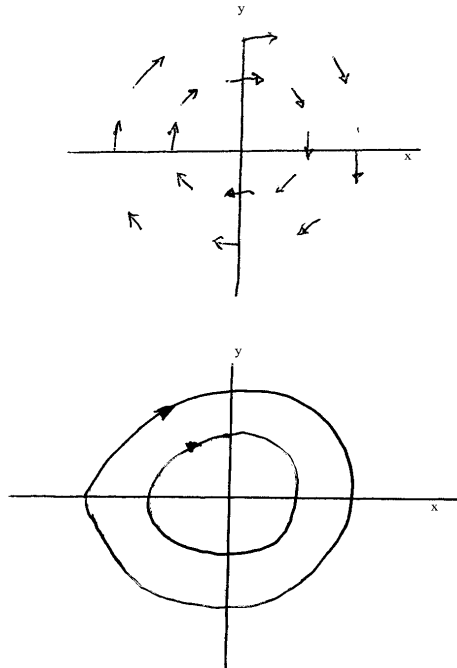


Figura 8

Un gráfico donde podemos poner toda la clasificación vista la podemos ver en la figura 9

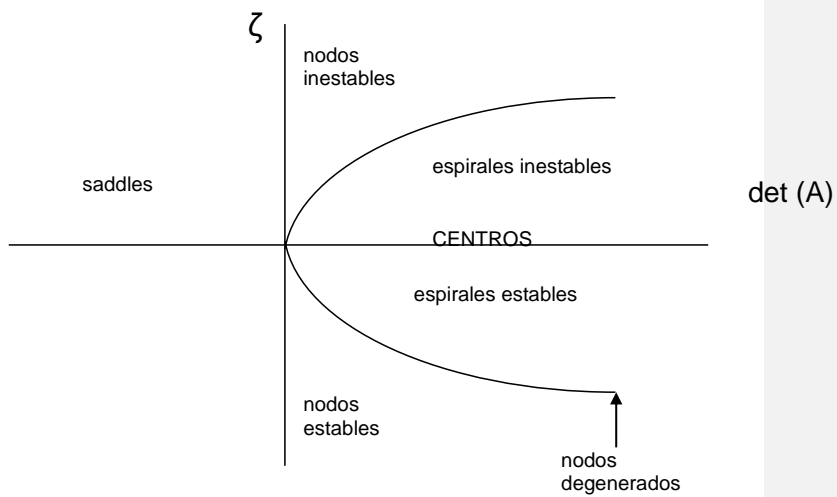


Figura 9



En el caso del oscilador con rozamiento en vez de tener centros tendremos espirales estables siendo el origen el reposo final. Ver figura 10

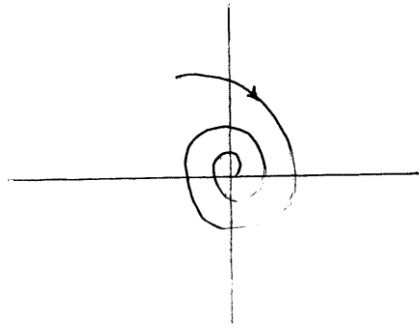


Figura 10



CAPITULO 6

SISTEMAS NO LINEALES. LINERIZACIÓN. RETRATO DE LAS FASES.

Trataremos con sistemas no lineales en 2D:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

O en forma compacta:

$$\dot{x} = f(x)$$

Donde x y f son de dos componentes

Lo que hay que tener en cuenta ahora es que podemos tener puntos fijos en cualquier lugar del plano y no solo en el origen como sucedía en el caso lineal. También, como veremos puede haber órbitas cerradas o ciclos límites aislados. Es decir no necesariamente centros. Las trayectorias cercanas al ciclo límite pueden acercarse o alejarse de él, por ejemplo en espiral.

Una pregunta que nos podemos hacer es ¿porqué dedicar tanto a los sistemas lineales? La respuesta es que si nos mantenemos cerca de los puntos fijos del caso no lineal podemos "linearizar" de la siguiente manera [\(9\)](#):

Primero debemos calcular los puntos fijos x^* que cumplen

$$f(x^*) = 0$$

Volvamos a explicitar las dos variables:



$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Supongamos que (x^*, y^*) es un punto fijo

O sea

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0$$

sea:

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v)$$

desarrollando en serie de Taylor y despreciando los órdenes cuadráticos tendremos:

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

Procediendo igual con v , se obtiene

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y}$$

Por lo tanto:



$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Donde A es la matriz Jacobiana de las derivadas parciales siguiente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

La pregunta es ¿cuándo me puedo olvidar de los términos cuadráticos? O sea ¿cuándo el sistema linealizado será correcto cerca del punto fijo? Cuando se trata de casos que no sean de tipo borderline. Osea el sistema linealizado predice el no lineal para saddle, nodos o espirales. Los casos de centros, nodos degenerados, estrellas y puntos fijos no aislados son mucho más delicados y pueden ser perturbados por pequeños términos no lineales.

Vamos a un ejemplo

$$\dot{x} = -x + x^3$$

$$\dot{y} = -2y$$

Los puntos fijos son (0, 0), (1,0) y (-1,0)

Linearizando [\(9\)](#), los tres puntos fijos vemos que tenemos un nodo atractivo en el origen y dos saddles en (1, 0) y (-1, 0). Ahora debemos "llenar" el retrato de fases con las líneas de flujo. Esto es casi un arte se trata de unirlos con el criterio de que las líneas no se pueden cortar.

Sin embargo para un comportamiento cuantitativo más riguroso debemos hacer correr un programa de integración numérica con varias condiciones iniciales. Para el método de integración computacional se suele usar el algoritmo de Runge-Kutta [\(9\)](#).

El retrato de las fases queda mostrado en figura 1:

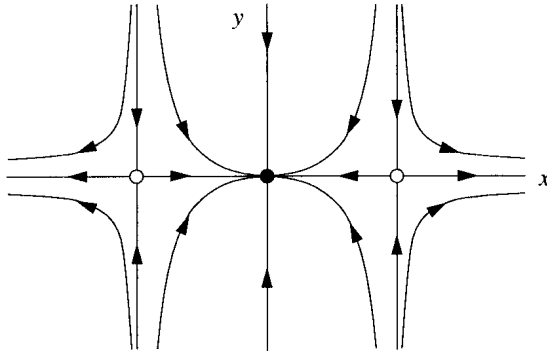


Figura 1

PÉNDULO SIN Y CON ROZAMIENTO

El problema del péndulo es la típica ecuación lineal que aparece en física básica. En los cursos más simples de física se trabaja con la aproximación

$$\text{sen } \theta \approx \theta$$

con lo cual la ecuación sale lineal.

En ausencia de rozamiento y de fuerza excitadora externa tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{sen}\theta = 0$$

Suponemos que la masa está unida a una barra de masa despreciable de longitud L . Lo primero que hacemos es construir la ecuación adimensional que le corresponda introduciendo

$$\tau = \omega t$$

con esta sustitución la ecuación queda:



$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$

escribiendo esta ecuación como los sistemas dinámicos:

$$\dot{\theta} = v$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

Los puntos fijos están en $(\theta^*, v^*) = (k\pi, 0)$, donde k es un entero cualquiera.

Como el sistema se repite cada 2π basta considerar los puntos fijos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$,

Linearizando en $(0, 0)$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto tenemos un centro. Es centro también en el sistema no lineal a pesar de ser un borderline (Ver ref. [\(9\)](#))

Para el otro punto fijo $(\pi, 0)$, la linearización da:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O sea tenemos un punto saddle.

Hasta ahora tenemos el retrato de fases cerca de los puntos fijos en figura2:

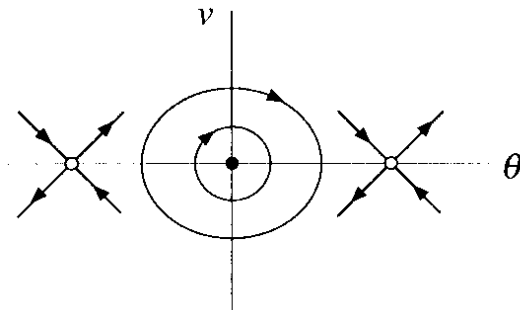


Figura 2

Llenando el espacio de fases, con arte, o ayudándonos con el método numérico tendremos:

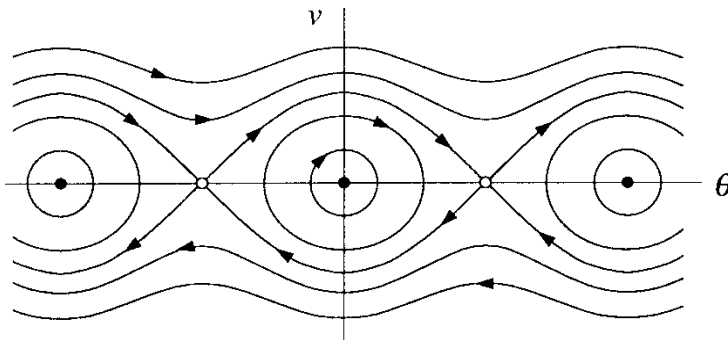


Figura 3

Las curvas cerradas se llaman libraciones y corresponden a la oscilación común del péndulo. Las uniones entre los saddles (en este caso separatrices) representan la inversión del movimiento al llegar al tope de la trayectoria. Las curvas no cerradas que hay por fuera de las separatrices simbolizan el caso de suficiente energía como para seguir rotando siempre en el mismo sentido. La velocidad será máxima en $(0, 0)$ y mínima $(\pi, 0)$ cosa que se repite cada 2π . Estas trayectorias se llaman rotaciones, porque es de ese tipo el movimiento que realiza el péndulo.

Péndulo con rozamiento

La ecuación ahora será:



$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

Con $b > 0$. Los centros se transforman en espirales estables y los saddles se mantienen. El retrato de fases hecho computacionalmente es del tipo de la figura 4:

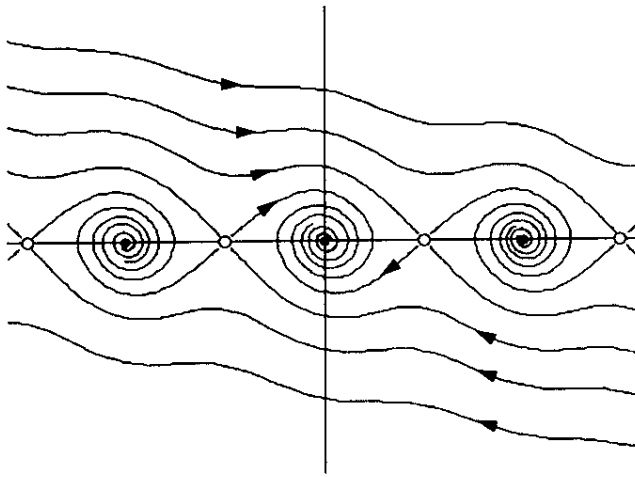


Figura 4



CAPÍTULO 7

CICLOS LÍMITES.

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada. Puede ser 1) estable, 2) inestable o 3) mitad estable y mitad inestable, como vemos en la figura 1:

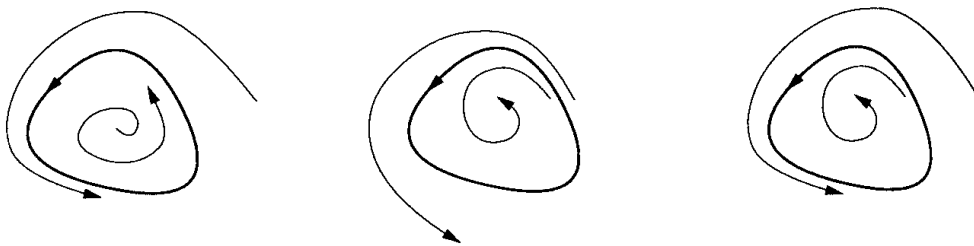


Figura 1

Estos ciclos tienen importancia en sistemas que muestran oscilaciones autosostenidas [\(12\)](#). O sea pueden mantenerse oscilantes sin acción de fuerzas externas. Ejemplos de esto son el batir del corazón, el ritmo de la temperatura del cuerpo a través de las horas del día, reacciones químicas autooscilantes. Los ciclos límites vimos que no aparecían en el caso lineal, (allí había centros no aislados). Es decir los ciclos límites son propios de la dinámica no lineal.

Como ejemplo sea el sistema

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

Donde $r \geq 0$. Las ecuaciones están desacopladas. Tratando la primera como el flujo en 1D tendremos la figura 2:

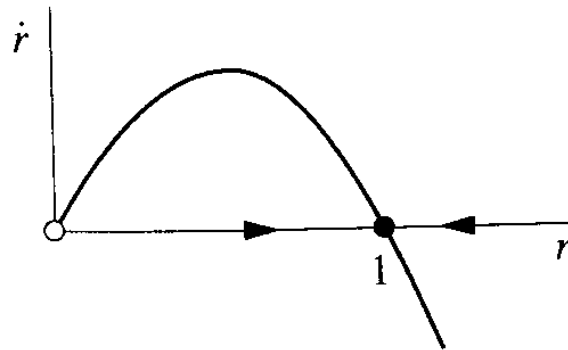


Figura 2

La segunda ecuación da una rotación a velocidad angular constante. El retrato de fases sería la dada en figura 3:

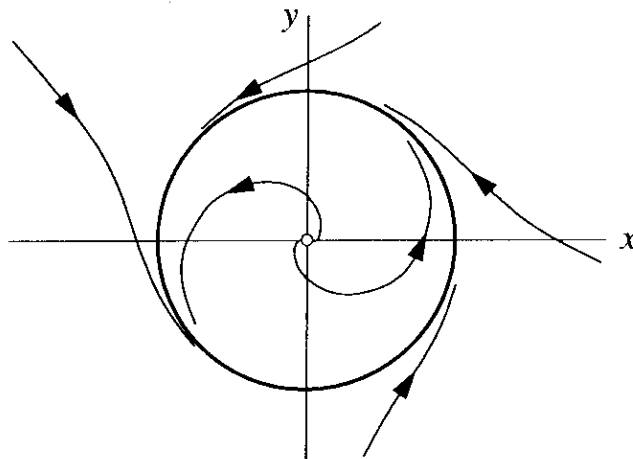


Figura 3

OSCILACIONES DE RELAJACIÓN

Estas fueron muy estudiadas por la ingeniería pero son útiles en ciencia en general:

Sea el sistema:



$$\dot{x} = y - x^3 + x$$

$$\dot{y} = -\varepsilon x \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

El movimiento en y es muy lento

Nos ayudamos para el dibujo con la ecuación de "puntos fijos"

$$y = -x + x^3$$

El retrato de las fases es dado en figura 4

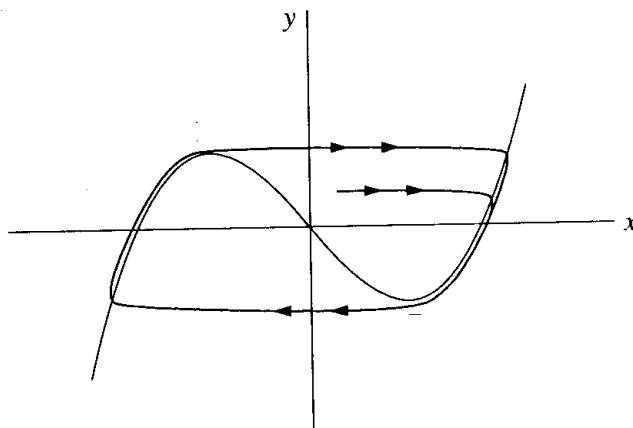


Figura 4

La oscilación en función del tiempo es:

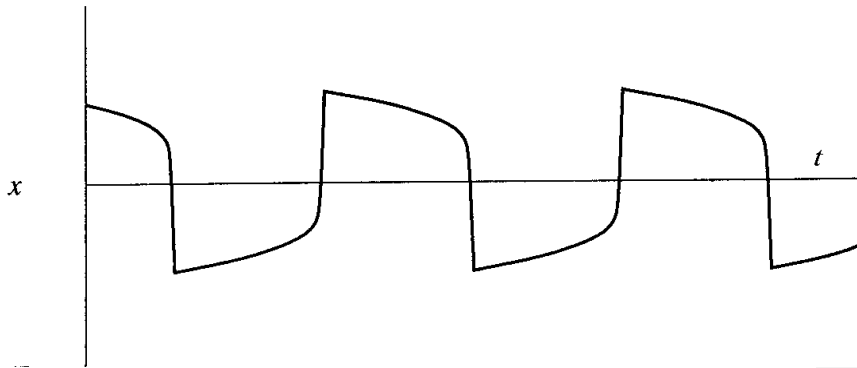


Figura 5

Mapas de Poincaré

Los mapas o secciones de Poincaré son muy útiles para analizar el flujo de los sistemas no lineales y establecer si hay órbitas periódicas o ciclos límites. Para un sistema de n variables el mapa será de $n - 1$ variables. Pero pensemos en tres dimensiones. En este caso la sección de Poincaré será un auténtico plano. Este plano se lo ubica de tal modo que el flujo lo corte perpendicularmente, como en la figura 6

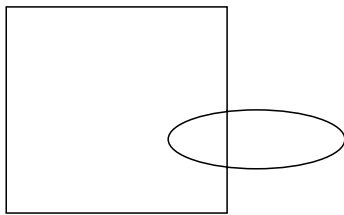


Figura 6



Si se trata de una simple órbita cerrada el mapa:

$$x_{n+1} = P(x_n)$$

tendrá un punto fijo:

$$x^* = P(x^*)$$

Para estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas podemos estudiar la estabilidad del punto fijo del mapa [\(12\)](#).

Casi nunca es posible obtener una expresión analítica para P . En general los sistemas caóticos presentan una infinidad de puntos en la sección de Poincaré. Ya lo veremos al final.

Ahora veamos un ejemplo donde se obtiene una expresión analítica para el mapa de Poincaré. Usaremos el caso visto al principio de este capítulo:

$$\dot{r} = r(1-r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

La superficie aquí se transforma en una recta, el eje x . Sea r_0 la condición inicial, la primera vez que el flujo cruce el eje x será después de un "tiempo de vuelo":

$$t = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)}$$

Evaluando la integral se obtiene:



$$r_1 = \left[1 + e^{-4\pi} (r_0^{-2} - 1) \right]^{-1/2}$$

O sea el mapa 1D de Poincaré será:

$$P(r) = \left[1 + e^{-4\pi} (r^{-2} - 1) \right]^{-1/2}$$

La órbita se estabiliza en el punto fijo estable $r^* = 1$.



CAPÍTULO 8

CAOS. EL MOLINO DE LORENZ

Ya habíamos definido caos en el capítulo 1 y mostramos allí extensamente el caos en mapas 1D. Decíamos que tenemos caos para las:

Soluciones de sistemas dinámicos no lineales deterministas que oscilan aleatoriamente, con una oscilación irregular y aperiódica, y donde se tiene una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que lleva a la imposibilidad de la previsión del comportamiento a grandes tiempos [\(9\)](#).

Vimos que en dos dimensiones las ecuaciones diferenciales ordinarias no presentan caos. Si puede haber caos para un sistema de más de tres variables.

Llamamos molino de Lorenz o rueda de agua caótica a un dispositivo mecánico experimental obtenido en el MIT en 1972 [\(24\)](#). Esquemáticamente lo podemos dibujar según figura 1:

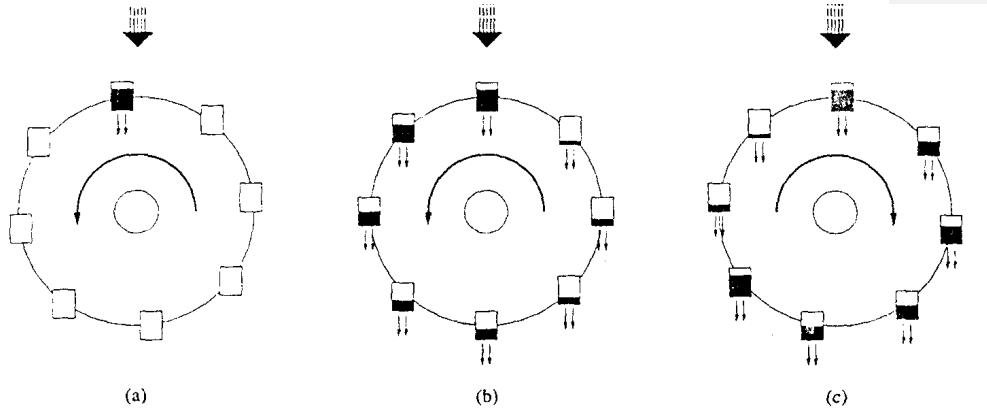


Figura 1

Cae agua en forma constante desde arriba llenando los baldes que pierden agua por debajo. También se podría hacer con baldes cerrados abajo pero con un líquido de rápida evaporación.



Cuando el flujo de agua entrante es pequeño no se vence el rozamiento y la rueda permanece estable. A mayor caudal gira en una u otra dirección dependiendo de la condición inicial. Y si aún incrementamos el flujo llega un momento en que la rotación es caótica. Gira varias veces en un sentido para luego girar un número de veces en el otro sentido siendo el número de giros caótico.

La matemática de este dispositivo es algo complicada (9), pero lo interesante del caos es que se llegan a unas ecuaciones análogas a las de Lorenz.

ECUACIONES DE LORENZ. CARACTERÍSTICAS. LIAPUNOV PARA LORENZ.

Las ecuaciones de Lorenz son

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y + xz \quad [40]$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Con $\sigma, r, b > 0$.

Por un lado esta ecuación es no lineal por los términos cuadráticos xy y xz

Tiene una importante simetría $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

Posee contracción de volumen en el espacio de las fases (9). Esto significa por ejemplo, que si tomamos un conjunto de condiciones iniciales que ocupen un volumen V , al evolucionar el sistema va hacia un volumen cero.

Los puntos fijos son de dos tipos

- 1) El origen es punto fijo para cualquier valor de los parámetros.
- 2) Para $r > 1$ habrá también un par de puntos fijos:

$$x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z^* = r-1$$



Estos dos puntos fijos se los llaman C^+ y C^- .

En cuanto a la estabilidad lineal del origen vemos que depende de r

Para $r < 1$ hay estabilidad global del origen (9). Es decir el origen es un sumidero donde van a parar todas las trayectorias cualquiera sea su condición inicial.

Para $r > 1$, la linearización podemos desacoplarla ya que:

$$\dot{z} = -bz$$

O sea cerca del origen z decae a cero exponencialmente rápido. Además

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La traza es negativa, y el determinante será negativo para el caso en consideración, por tanto tenemos un saddle. Pero es un nuevo tipo de saddle, en 3 D. Con dos ramas estables y una inestable.

En cuanto a la estabilidad de los puntos fijos C^+ y C^- , son linealmente estables para (9):

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

Lo nombramos con H porque los puntos fijos pierden estabilidad por una bifurcación de Hopf (12). Es decir un círculo límite inestable que rodea al punto fijo estable C desaparece y el punto fijo C pasa a ser inestable. Esto lo podemos visualizar en las figuras 2 y 3:

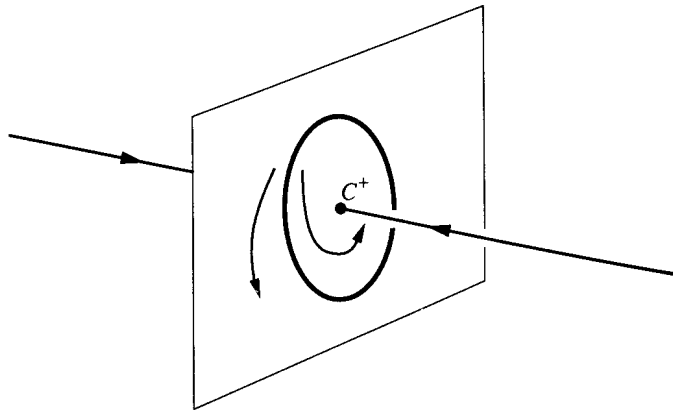


Figura 2

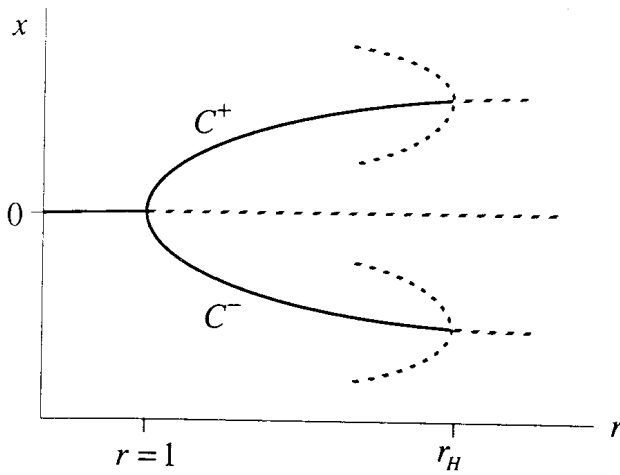


Figura 3

Antes de perder estabilidad vemos en figura 4 como el sistema se aproxima a C

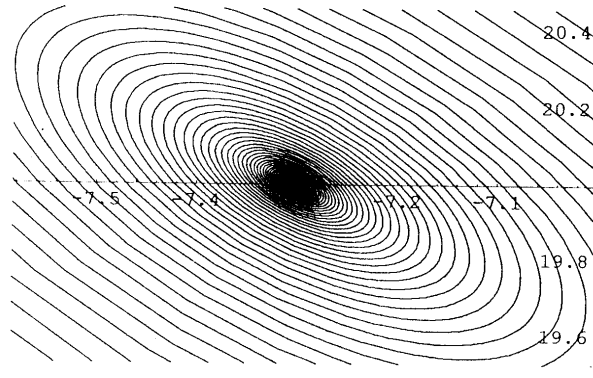


Figura 4

Entonces para $r > r_H$ ya no hay objetos estables. ¿significa que todas las trayectorias se van a infinito?

No, hemos llegado a la zona del caos, donde las trayectorias tienen un raro comportamiento. Se acercan a uno de los C allí empiezan a girar en una espiral, dando un número de vueltas para luego pasar a girar entorno al otro punto C un número arbitrario de vueltas y así sucesivamente. Desde el punto de vista espacial estas dos series de espirales se dan prácticamente en dos "alas de Mariposa" como vemos en la figura 5:

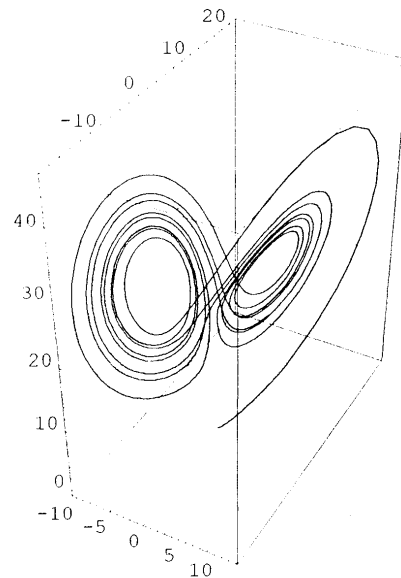


Figura 5



Este es el así llamado atractor extraño de Lorenz.

El exponente de Liapunov para Lorenz lo calculamos suponiendo una pequeña diferencia en las condiciones iniciales δ_0

$$\|\delta(t)\| \approx \|\delta_0\| e^{\lambda t}$$

En la figura 6 mostramos que la pendiente es positiva, para parámetros en donde hay caos.

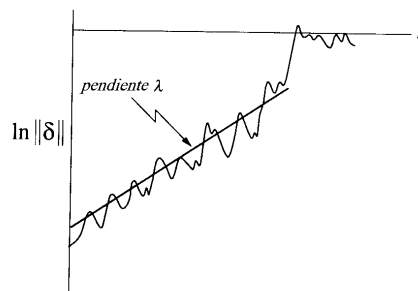


Figura 6

La sensibilidad a las condiciones iniciales las mostramos en la figura 7 donde hemos tomado los valores

$$\sigma = 3$$

$$r = 26.5$$

$$b = 1$$

$$x_1, y_1, z_1 = (0, 1, 0)$$

$$x_2, y_2, z_2 = (0, 1.1, 0)$$

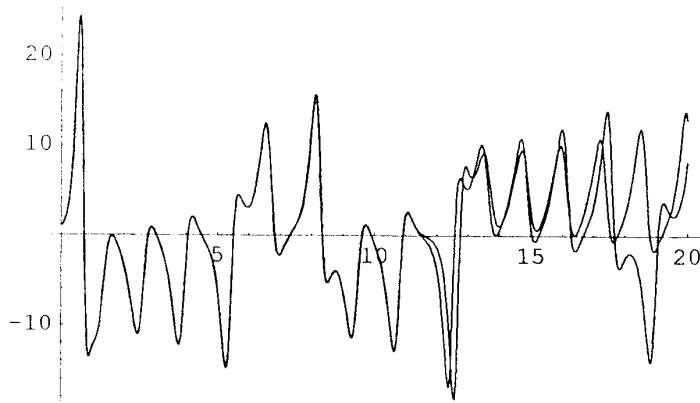


Figura 7

De todos modos quedaría un punto de duda. En todo esto, hemos analizado el sistema de Lorenz numéricamente con computadora. Cabría desconfianza ante este método. Sin embargo Tucker [\(25\)](#), en 1999, probó que el sistema de Lorenz es un verdadero atractor caótico basándose en el concepto de hiperbolicidad singular y en la técnica de formas normales [\(26\)](#).

SISTEMA DE RÖSSLER

El sistema de Rössler es en tres dimensiones quizás el más simple que da soluciones caóticas:

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x - ay \quad [41]$$

$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

Lo interesante del caso es que se acerca al caos por duplicación de período.

Usando los valores:



$a = + 0.2$
 $b = + 0.2$
 $c = 2.5, 3.5, 4 \text{ y } 5.$

Variando c vamos obteniendo las figuras 8 a , b, c, d

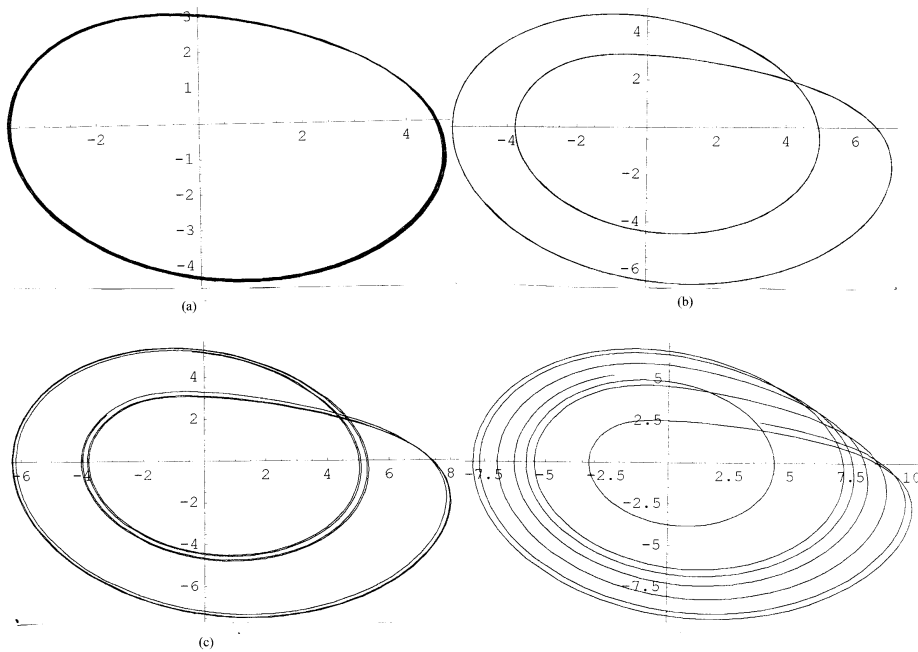


Figura 8



CIRCUITO ELÉCTRICO CAÓTICO.

El circuito de la figura 9 muestra una ruta al caos por duplicación de período de la tensión entre los puntos A y B (figura 10)

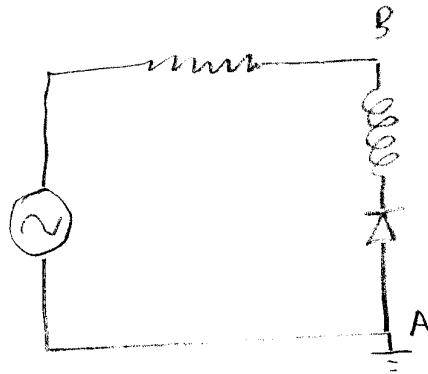


Figura 9

Datos de los componentes

$$R = 200 \Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$

Diodo: 1N 4004

Fuente: Frecuencia 3 MHz, Amplitud 0.1 V a 10 V

Se grafica (figura 10) la señal en la fuente contra la señal en la resistencia.

A medida que se incrementa la amplitud se obtiene una respuesta en el osciloscopio:

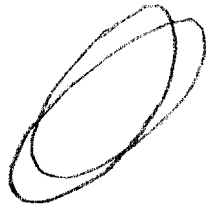
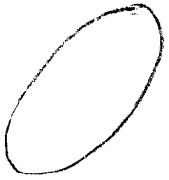


Figura 10

Tenemos período 1, período 2 y el grisado ya es caos.



CAPÍTULO 9

FRACTALES. CANTOR. KOCH. DIMENSIÓN DE UN FRACTAL

Podríamos decir que un ejemplo de fractal sería una fotografía donde hay una persona mostrando una fotografía de esa misma persona mostrando una fotografía ya sí sucesivamente.

Es decir un fractal es un objeto geométrico que tiene autosimilaridad a cualquier escala. Esta autosimilaridad a veces es exacta y a veces solo en apariencia.

Hemos visto en el diagrama de bifurcaciones del mapa logístico que había fractalidad al agrandar una partecita de una ventana. Los atractores extraños también tienen estructura de fractal.

Los fractales se dan mucho en la naturaleza. Basta pensar en un árbol. Este tiene un tronco del cual salen ramas. A su vez cada rama tiene otras ramitas que salen en forma casi autosimilar al tronco y sus ramas mencionado. Luego cada ramita tiene otras ramitas... incluso si llegamos a la hoja volvemos a ver ramificación en sus nervaduras.

El fractal de Cantor es un segmento al que se le saca el tercio central. (se saca un abierto, o sea $1/3$ y $2/3$ pertenecen al fractal). Luego a los dos pedazos que quedan se le vuelve a sacar el tercio central y así sucesivamente al infinito. Ver figura 1:

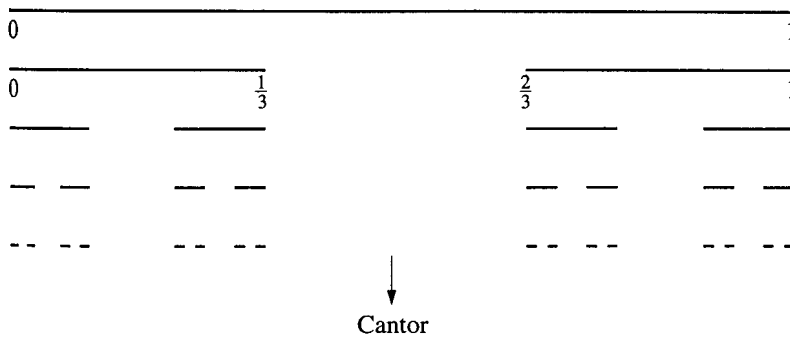


Figura 1



Es fácil probar que este fractal de Cantor tiene medida cero y que contiene un número infinito de puntos. También puede verse que se trata de un infinito no contable [\(9\)](#).

El fractal de Koch se construye de la siguiente forma (figura 2):

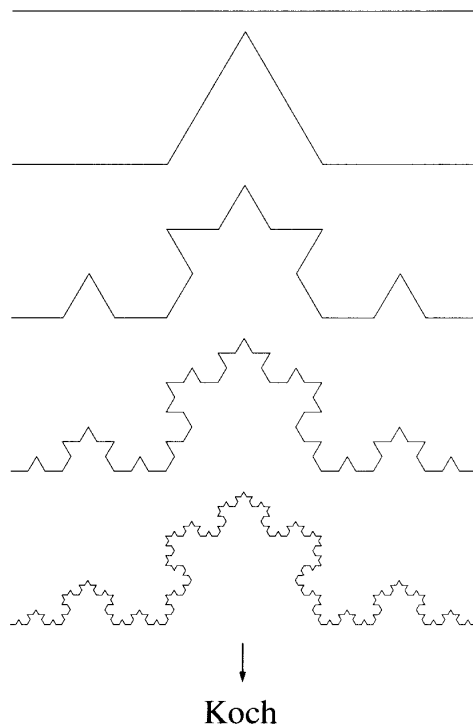


Figura 2

La longitud de la curva de Koch tiende a infinito.

La forma más sencilla de definir la dimensión de un fractal es como sigue [\(9\)](#).



Sea el siguiente fractal simple (figura 3):

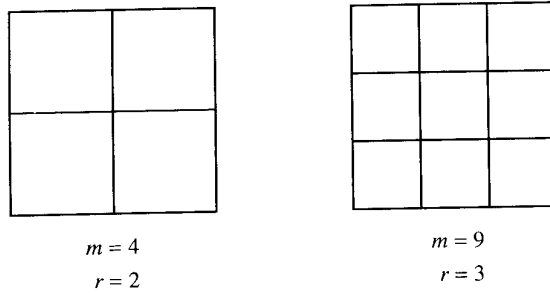


Figura 3

m = número de copias
 r = factor de escala

Estas m y r cumplen que:

$$m = r^d \quad [42]$$

En los casos vistos $4 = 2^2$ y $9 = 3^2$ donde 2 es la dimensión del cuadrado.

Usando [42] definimos dimensión de un fractal:

$$d = \frac{\ln m}{\ln r} \quad [43]$$

Aplicando esta fórmula al fractal de Cantor tendremos

$$d = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.63$$



Es decir tiene menos dimensión que un segmento pero mayor que cero

Para la curva de Koch

$$d = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$$

Es decir una curva que tiende a una longitud infinita termina por tener una dimensión que está entre 1 y 2.

Una variante de la curva de Koch es el siguiente esquema arborescente tipo pulmón de la figura 4:

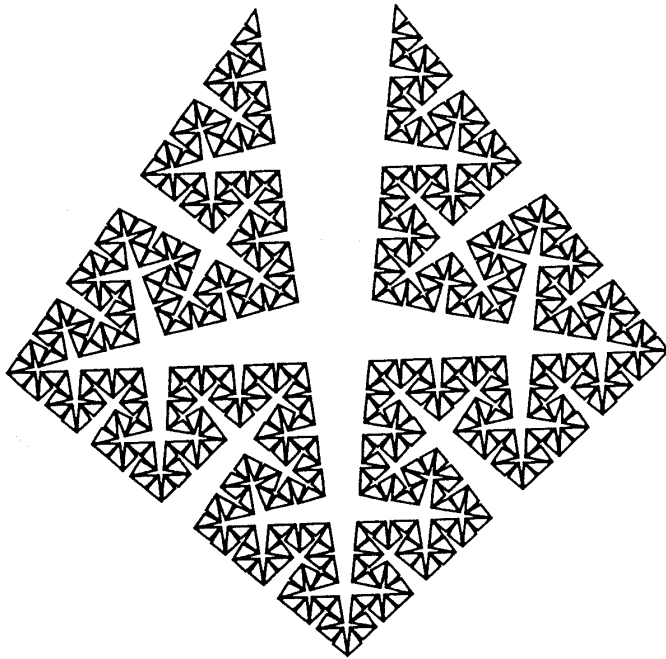


Figura 4

Hay otras maneras de definir dimensión [\(9\)](#) y se ha demostrado que la dimensión del fractal del atractor de Lorenz es 2.05 ± 0.1 . Correspondiente al plano de las "alas de mariposa".



CAPÍTULO 10

ATRACTORES EXTRAÑOS. HERRADURA DE SMALE. MAPA DEL PANADERO

En un atractor extraño las trayectorias se mantienen en una región acotada pero divergen de sus vecinas exponencialmente rápido, al menos inicialmente (9).

El mecanismo básico es la repetición de estirar y doblar. Al estirar dos puntos próximos se alejan entre sí pero como no puedo estirar hasta infinito, la doblo (figura 1):

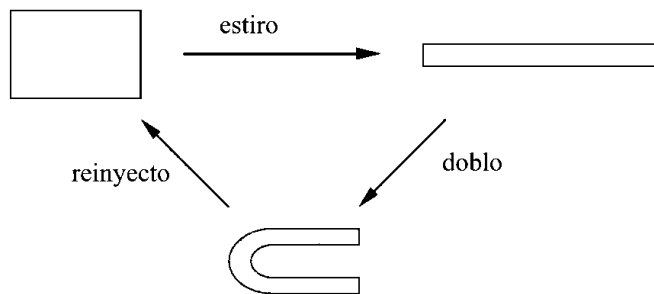


Figura 1

Repitiendo la secuencia llamamos herradura de Smale a la siguiente construcción de la figura 2:

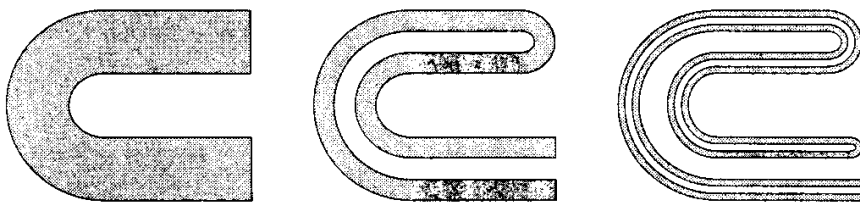


Figura 2



El mapa del panadero es un mapa en 2D que está definido por las siguientes ecuaciones:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n, ay_n) \quad \text{para } 0 \leq x_n < 1/2$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n - 1, ay_n + 1/2) \quad \text{para } 1/2 \leq x_n \leq 1$$

con $0 < a \leq 1/2$ y $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Cada transformación se puede ver como la sucesión de estirar y apilar como en la figura 3:

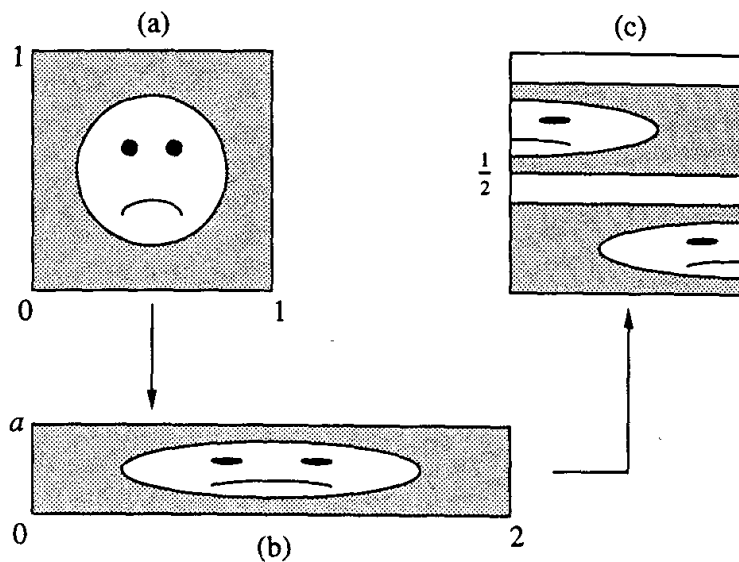


Figura 3

La sucesiva aplicación de este mapa la vemos en figura 4:

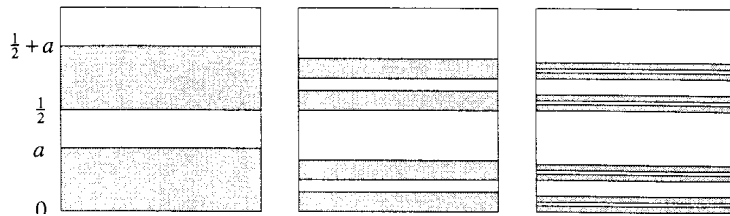


Figura 4

MAPA DE HENÓN

El mapa de Henón es un mapa 2D dados por las ecuaciones

$$x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2$$

$$y_n = b x_n$$

se puede demostrar que estas ecuaciones equivalen a un estiramiento y doblez (9).

El atractor que genera este mapa tiene la forma de la figura 5:

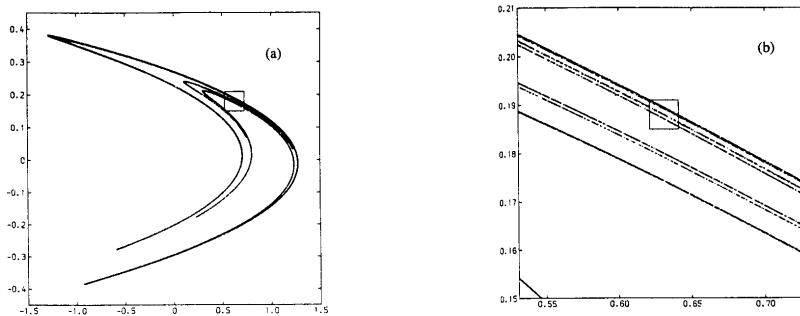


Figura 5



OSCILADOR DE DOBLE POZO. CUENCAS CON LÍMITES FRACTALES.

La ecuación de Newton para una partícula en un potencial de doble pozo:

$$V(x) = x^4/4 - x^2/2$$

y que además está sometida a una fuerza periódica y al rozamiento, se escribe:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = F \cos \omega t$$

Para los valores:

$$\delta = + 0.25$$

$$\omega = 1$$

$$F = 0.4$$

Tenemos un comportamiento caótico de la figura 6:

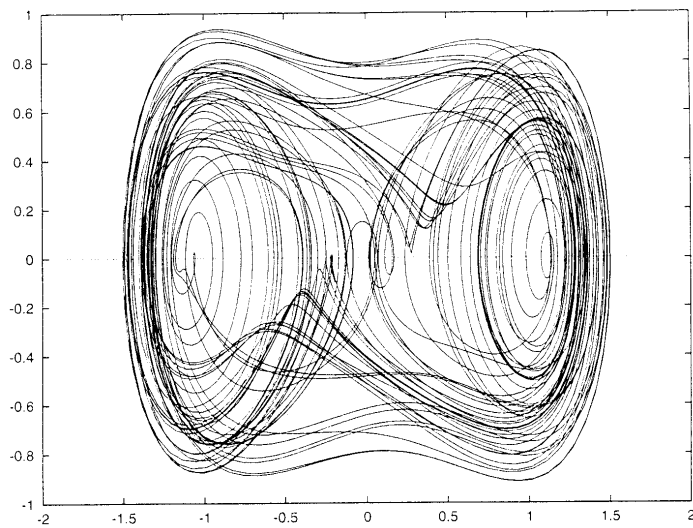


Figura 6



La sección de Poincaré la mostramos en figura 7

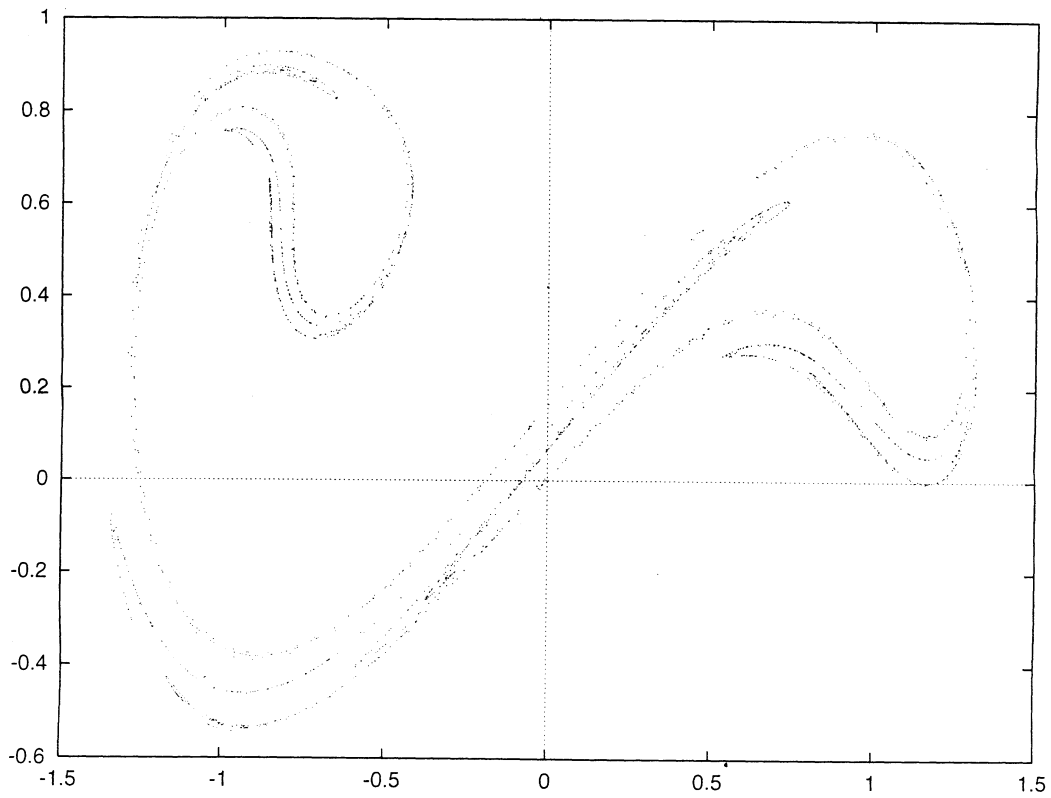


Figura 7



En las figura 8 y 9 mostramos que dos condiciones iniciales muy próximas, después de pasar por un corto transitorio van a parar a diferentes atractores periódicos

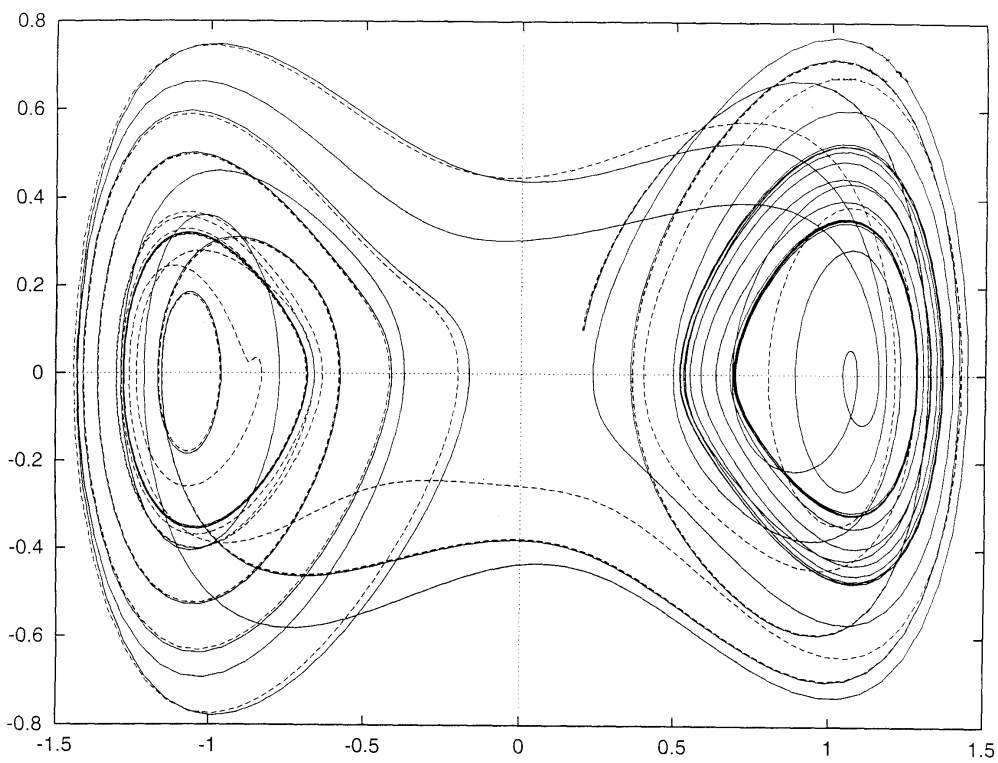


Figura 8

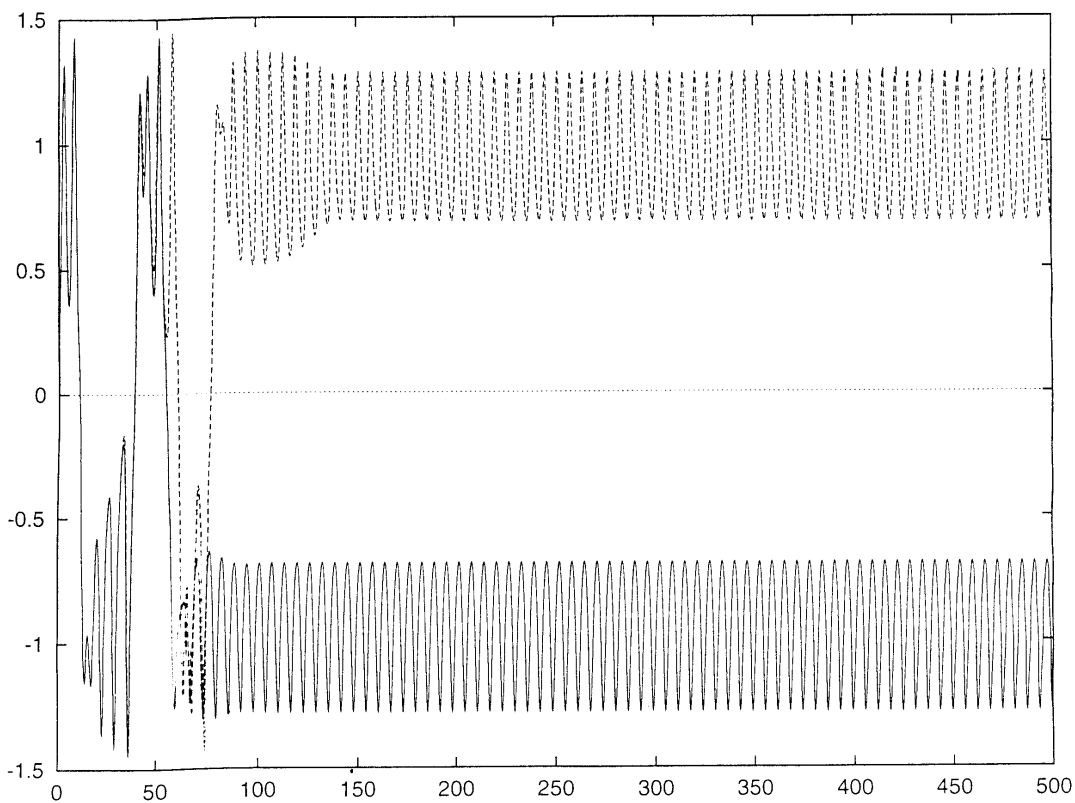


Figura 9

Llamamos cuenca de un atractor al conjunto de condiciones iniciales que van a para a ese atractor. A veces las cuencas están separadas en forma nítida, pero otras veces, como en el caso arriba visto, estos bordes son de tipo fractal, es decir, no puedo de antemano predecir a que atractor va a para la trayectoria.



CAPÍTULO 11

CAOS, RUIDO, AZAR, CAUSA

Como dijimos en los primeros capítulos el caos aquí tratado trata de caos determinístico. Es decir determinado por unas ecuaciones concretas. Por un lado el hecho de haber encontrado caos en las ciencias naturales no implica que todo sea caótico. Ya vimos que se da caos para ciertos valores de los parámetros que gobiernan las ecuaciones del sistema dinámico.

En cuanto al ruido la situación es diferente. Ruido es un comportamiento intrínsecamente aleatorio. Se han hecho muchos trabajos donde se agrega ruido al caos (16) y (17). En estos casos particulares se ve obstaculizado el control del caos debido al ruido. Es decir la órbita a veces es pateada fuera del control para ser controlada nuevamente.

Se ha escrito mucho sobre como introducir algo intrínsecamente aleatorio (en inglés random), hasta se ha intentado usar el mismo caos para generar números al azar (27).

El lector entenderá que ruido no es solo el que entra por el oído. Hay ruido auditivo pero también hay ruido en la tensión de 220 Volts que recibimos en casa. Es decir si midiéramos con un instrumento sensible veríamos un continuo fluctuar alrededor de los 220 Volts. Este podría ser un ruido genuino ya que las oscilaciones de la línea dependen del uso libre de artefactos eléctricos por parte de todos los usuarios de la red eléctrica interconectada.

En cuanto al azar y la causa. De la casualidad y la causalidad podrían decirse varias cosas. Cuando hablamos del azar enseguida pensamos en los juegos de azar. Tirar al aire una moneda y ver cuando sale cara y cuando seca. En realidad aquí no hay verdadero azar. La moneda sale de la mano regida por el impulso angular dado por el dedo y su movimiento se rige por la mecánica del cuerpo rígido. Lo que sucede es que son tan distintos los tiros... Pero un hombre con paciencia y adiestramiento podría dominar relativamente sus tiros, la distancia hasta que toque el piso, etc... y así lograr una mayoría de caras por ejemplo. No se cumpliría la ley probabilística del 50%. Lo mismo podemos decir de un croupier del casino.

En todo caso podemos hablar juegos de azar debido a imposibilidad de controlar la posición inicial (28), y lo complicado de los movimientos.



Pero el azar existe. En primer lugar si existe una palabra para designarlo ya nos damos cuenta de una realidad subyacente.

Cuando me encuentro en la calle sorpresivamente con un amigo, me encuentro por casualidad es decir por azar. Si en cambio llamo por teléfono a mi amigo y quedamos en encontrarnos en una esquina, ese encuentro fue previamente causado.

Pero analicemos el encuentro casual. Veremos que el azar se explica por la causa y no la causa por el azar. (Hay corrientes modernas que así lo afirman por ejemplo para Big Bang). Yo me encuentro con un amigo porque había decidido (causa final) ir a comprar el diario. Mi amigo iba hacia la facultad (con causa final de estudiar). Y nos encontramos. Definiremos azar a la "interacción entre series causales"[\(32\)](#). Otra componente del azar en el ejemplo mencionado es la sincronización en el tiempo y el espacio de esas dos series causales: su marcha a la facultad y mi salida a comprar el diario. Pero no llegamos a entender del todo el porqué se produce el encuentro.

CAOS EN LA ECONOMÍA Y EN LAS CIENCIAS SOCIALES

Se ha intentado aplicar el caos a la economía. En particular a las oscilaciones del mercado de acciones. El mapa logístico tiene la "apariencia" de las oscilaciones en la bolsa. Pero es solo apariencia. Si la cotización fuera determinista habría que encontrar la fórmula del sistema dinámico y podríamos hacernos ricos prediciendo los valores a futuro. Pero aquí como en las ciencias sociales interviene el hombre con su libertad y el comportamiento no es determinista.

La economía "neoclásica" (ortodoxa) intenta establecer su ciencia al modo de la física sin considerar la libertad individual [\(30\)](#). Si no se puede predecir no es por la libertad sino por falta de datos. Luego, la escuela austríaca, da un poco más de cabida a la incertidumbre del accionar individual [\(30\)](#). Por último Crespo analiza "la Economía humanista de Lutz y Lux, con la importancia de la psicología. También en esta obra [\(33\)](#) se habla de la "Retórica en economía" de D McCloskey y del renacimiento de la "Economía política".

Lo que sí podemos decir es que los mercados serán más azarosos cuando una gran parte de una sociedad confunde libertad con libertinaje. De este modo el comportamiento social se haría más "caprichoso". Habría más ruido y sería aun menos adecuado el caos determinista.



CAPÍTULO 12

CIENCIA, EDUCACIÓN, CULTURA, CIVILIZACIÓN, TÉCNICA

El carácter utilitario de la ciencia.

Si bien es conocido por todos el admirable avance de la técnica actual, no es bien comprendido el papel de la ciencia en este proceso, o se entiende a esta última como única responsable de la primera. Aún entre algunos científicos, para los cuales el único fin de la ciencia, es la tecnología, reina un cierto escepticismo, sobre la verdad que la ciencia, podría descubrir. Es decir una desviación en la misma definición de ciencia, en su punto de partida.

Definiendo bien qué es ciencia el científico queda abierto a la verdad en general. No sólo a la verdad de su ciencia particular sino también a saber darle el lugar que les corresponde a sus saberes dentro de los demás conocimientos.

Sin embargo en muchas ocasiones la ciencia es entendida de modo utilitario solamente, como "preámbulo de la tecnificación" (31). Esta tendencia puede verificarse en, numerosas publicaciones. Sus autores en vez de introducirnos en el campo del saber que corresponda, empiezan sus artículos citando las aplicaciones que sus teorías podrían tener.

Es cierto que la técnica se nutre de la ciencia, ya que es imposible poner al servicio del hombre la naturaleza, si ésta no se conoce. Pero este es el objetivo de la ciencia aplicada, (ingeniería, medicina...) que, además de la ciencia que la fundamenta (física, biología...) debe valerse de criterios de utilidad. Si estos criterios de utilidad están rectamente orientados al bien del hombre y de la sociedad esas técnicas cumplirán satisfactoriamente su fin.

Se da en la ciencia, por un lado la búsqueda de la verdad, y por otro lado, la capacidad de controlar el experimento y así ser de utilidad práctica.

Lo absurdo es que en publicaciones de ciencia pura, se invoque como supremo fin de las mismas su aplicación técnica, en vez de su interés intrínseco científico: el conocimiento de un aspecto de la verdad.

Es cierto que esos preámbulos de los artículos científicos, en los cuales se explicita el fin del trabajo, se deben a veces a exigencias impuestas por el



empleador, el cual, al dirigir el departamento de investigación de una institución solo orientada a la práctica, obliga a los empleados a realizar una ciencia que sea útil.

Caen en la misma crítica los estados que relegan el papel de la ciencia al binomio ciencia y tecnología en detrimento del trinomio ciencia, educación y cultura.

Entiendo por cultura el conjunto de hábitos humanos que heredamos del pasado. La cultura es más bien algo interno de los hombres: como piensan, como quieren. Muy relacionado con esto tenemos a la civilización. Civilización hace más bien a los objetos exteriores que el hombre va desarrollando a través de los siglos.

Por ejemplo el tren a vapor es una muestra de civilización pasada. Las obras de la civilización caen en desuso, y es importante resguardarlas en museos. Ahora bien, los conocimientos de cómo funcionan los trenes es parte de la cultura. Estos conocimientos los heredamos de nuestros profesores y libros, bueno ahora Internet también. Es decir un libro sobre trenes es un objeto de la civilización. Los conocimientos que contiene son parte de la Cultura.

Se ha hablado bastante del drama de las dos culturas. La humanística y la de las ciencias naturales. También se ha nombrado como "tercera cultura" a los escritos de divulgación.

Sigamos con la ciencia. Cuando la motivación de la ciencia es solamente su aplicación a la técnica, la ciencia misma se degrada, ya que se la priva de su verdadero significado y se la aparta de su relación con la verdad.

Dependencia e independencia entre ciencia y técnica.

En general se comprende bien que no toda la ciencia, termina por aplicarse a la técnica. Es más, hay ciencias enteras como la filosofía que carecen por completo de utilidad inmediata. Pero así como es tan patentemente inútil es tan patentemente amable per sí misma [\(32\)](#).

No toda la técnica termina en un servicio del hombre (o perjuicio); al contrario, hay técnicas que a su vez son útiles a la ciencia. Por ejemplo una técnica de laboratorio.



Pero el aspecto más interesante del terna que estamos tratando es que puede hacerse una brillante técnica con un conocimiento poco sabio de las leyes naturales involucradas en la parcela de la naturaleza de la cual se sirve el proceso de tecnificación (aunque siempre se necesite un mínimo de conocimientos, que no siempre es pequeño).

Para comprobar lo que acabamos de afirmar basta contemplar el inmenso desarrollo de la tecnología nuclear: centrales nucleoelectricas, propulsión de submarinos, bombas atómicas, etc. Sin embargo, no se conoce con exactitud la fuerza de origen nuclear, la interacción que es responsable del fenómeno. Al menos no se la conoce con la precisión y claridad con que conocemos la ley de atracción y repulsión de partículas cargadas (Ley de Coulomb) (33). Bibliotecas plagadas de libros y estanterías colmadas de colecciones enteras de revistas especializadas sin encontrar la expresión fisicomatemática precisa es el resultado de más de cincuenta años del siglo XX.

Mostremos un ejemplo más sencillo: el constructor de un tobogán sólo necesita saber que los niños caen. No le hace falta conocer la ley de gravitación universal, y menos aún la más moderna interpretación de los fenómenos gravitatorios, es decir que los cuerpos siguen la curva geodésica determinada por la geometría que genera la tierra según, las ecuaciones de Einstein de la relatividad general.

Hacia un correcto planteamiento de la noción de ciencia

"La ciencia misma, -en su entraña, en su orientación de fondo, en su modo de construirse y de expresarse, -debería recuperar la integridad de lo real – el ente–, que parece haber perdido desde hace ya mucho tiempo. Para ello, habría que purificar el conocimiento científico de adherencias filosóficas desviadas" (31).

Parte, de la desviación consiste en un erróneo concepto del "modelo" en las ciencias. Los modelos de la realidad son necesarios para el avance de las ciencias, pero esos modelos deben mejorarse y reemplazarse por otros cada vez más perfectos y adecuados a la realidad. Por el contrario algunas corrientes filosóficas dan más importancia al modelo que a la realidad, más importancia a la coherencia interna de la teoría que a su verdad. De allí a desvincular el modelo de la realidad hay un solo paso. En ciertos casos quedarían débilmente vinculados a la realidad por el solo hecho de brindar datos de lo fáctico útiles para la técnica; entonces modelos distintos serían aceptados si arrojan los mismos datos.



Entendemos ciencia como conocimiento cierto de la realidad por sus causas. Con este concepto desinteresado de ciencia abrimos nuestra inteligencia a los distintos tipos de saberes, diversificados por el sector de la realidad que abarcan, y por el método de estudio empleado, ya sean particulares (Física, Matemática, Biología...); como generales y filosóficos.

Quizás podemos completar y actualizar la definición de ciencia diciendo que en las ciencias naturales debemos ir por inducción desde el experimento, organizar sistemáticamente el mismo, formular hipótesis, compararlas con el experimento, hacer modelos, construir teorías, etc.

En cambio si definimos ciencia como "preámbulo de la tecnificación" nos encerramos en un círculo vicioso o a lo más en un círculo antropocéntrico, en el cual resolver las necesidades materiales del hombre sería en último término el objeto del uso de su inteligencia.

Este camino es a su vez desesperante para el científico, porque ya nos enseña la historia -que, en general, pasan muchos años desde los descubrimientos científicos hasta las aplicaciones prácticas. No es este el caso de la tecnología nuclear a la que nos hemos referido, la cual se ha desarrollado rápidamente y ha provocado un exagerado juicio de "éxito" de la ciencia del núcleo, juzgándola, más por sus espectaculares aplicaciones que por sí misma.

Desde el descubrimiento de la reacción química que se utilizaría en fotografía hasta la primer foto pasaron cerca 100 años. Sin embargo desde el descubrimiento de que el láser serviría para hacer el CD, hasta el primer CD, pasaron 4 meses. Para controlar la fusión nuclear pasó casi todo el siglo XX y seguimos esperando.

En resumen, si es cierto que la ciencia tiene relación con la técnica, no es esta su única relación ni la más importante. Antes que nada las ciencias particulares tienen relación con el saber general, siendo así no sólo informativas de recetas de construcción tecnológicas sino también formativas de hábitos intelectuales que permitan al hombre volar hacia verdades cada vez más profundas y por ello más verdaderas, felices y trascendentes.

Sin embargo a Latinoamérica en general le vendría bien, hoy por hoy, un mayor desarrollo del aspecto ciencia-tecnología.



FILOSOFÍA POLÍTICA Y SOCIAL

Ahora nos toca enmarcar la ciencia como actividad inserta en la sociedad y la política. No siendo un especialista en sociología y política, puedo equivocarme grandemente. Sin embargo lo que sigue servirá como aquellos supuestos que un hombre dedicado a la física tiene respecto a la inserción social de la misma.

Se ha definido el fin del Estado como el "bien común" temporal. En mi opinión yo diría que la meta del Estado es el "ser común". Los partidarios del bien común no tendrán dificultad en aceptar esto ya que "*ens et bonum convertuntur*".

Ahora las principales notas del ser son unidad, bondad, verdad y belleza. Hacia esos cuatro fines se debería mover el Estado.

Si hay cuatro notas o fines básicos yo daría la prioridad a cuatro ministerios: El de política y relaciones exteriores (unidad y relación entre las instituciones), el de bienestar social, salud y deporte (bien), el de ciencia y educación (verdad) y el de arte y urbanismo (belleza).

Las universidades con sus clases e investigación pertenecerían al de ciencia y educación. En cuanto a la técnica, por ejemplo, no sería otra cosa que cierta relación entre el ministerio de ciencia y el de bienestar social.

De esta forma nos salvamos del economicismo, donde todo depende de la economía en vez de poner a esta subordinada a los fines políticos. Es preciso volver a plantearse seriamente las prioridades políticas.

Pero todo esto provino de que el fin de la ciencia es la verdad. Si bien esto es correcto. Además de analizar la ciencia como verdadera o falsa podemos verla como:

Útil o perjudicial
Nueva o banal
Cara o barata
Interesante o trivial
Elegante o fea
Autónoma o sojuzgada



Se dice que la ciencia es indiscutible y la política discutible (34). Lo que hemos intentado es un poco lo contrario. Criticar y opinar con fundamento la ciencia y dar una cierta solidez a la política.

ETICA EN LA INVESTIGACIÓN BÁSICA

0. Cumplir el horario con flexibilidad. (A veces paseando o en casa se descubre algo).
1. Amor a la verdad: adecuación entre la razón y la realidad.
2. Investigar para encontrar la verdad del propio campo de estudio y para difundirla. No por mero afán de publicar ni por urgencias de aplicaciones.
3. Ubicar el propio estudio en el marco de las demás ciencias y en el lugar que le corresponde dentro del saber general y filosófico.
4. Conocer y citar las fuentes, sin seleccionarlas arbitrariamente para satisfacer intereses de parte.
5. Respetar la propiedad intelectual y no atribuirse aportaciones de los demás.
6. No hacer "bombos mutuos". (Yo te cito para que vos me cites).
7. No dar valor absoluto a lo que sólo es hipótesis.
8. Tener rigor intelectual y seguir el método científico.
9. Respetar, formar y promover a los alumnos y colaboradores que den muestras de capacidad y dedicación, conviviendo amigablemente con ellos.
10. No hacer gastos superfluos para la investigación, en viajes, material, etc.



11. No extrapolar indebidamente los conocimientos del propio estudio a otras ramas de la ciencia. Tener en cuenta la opinión de cada especialista.
12. Tener y guiarse por una filosofía (ideas mas profundas), ya que el científico que no la posea es un artesano, artesano complicado, pero artesano al fin.
13. Tratar de que el científico reciba un sueldo que le permita sostener con dignidad una familia.



CAPÍTULO 13

LA LEYENDA DE LA FRUTA MARRÓN

Voy aquí a resumir un cuento que circuló por los laboratorios de física en la década de los '80 con el título *La légende de la "papate" ou Qu' est ce que c'est?* (Una contribución a la pregunta: ¿el electrón es un corpúsculo o una onda?) de N. Stolterfoht (Institut Hahn Meitner, Berlin) y traducida al francés por Catherine y Léon Sengelin.

Incluyo este cuento porque nos acerca a lo que es el espíritu de la investigación original. Es decir nos habla del descubrimiento de algo nuevo y la actitud que debe tener un científico

Había una vez en Andorra un vendedor de frutas. Estaba casado con una francesa y tenía dos hijos, uno de cuatro años y una de dos. Los cuatro hablaban el castellano y el francés. No era un comerciante cualquiera, había podido hacer algunos cursos de filosofía. Era respetado en su ciudad.

Las artes y las ciencias estaban en pleno desarrollo. Pero lo más interesante es que se había descubierta la redondez del planeta y las lejanas tierras situadas al otro lado del océano.

A la gente le gustaba viajar allende los mares y traer todo tipo de souvenirs exóticos de América.

Fue así como llegó la fruta marrón, del grosor de un puño y agradable ya sea cocida o cruda. Dentro de las frutas conocidas se parecía a la manzana y a la pera. Algunos ejemplares tenían forma de pera, otros de manzana.

Fue así que se produjo en la ciudad una división entre la gente. Unos decían que se trataba de una manzana y los otros que era una pera.

Los comerciantes de frutas se dividían en dos. Unos vendían pera y otros manzana. Puesto que la fruta marrón se veía como un buen negocio, se entiende que ambos grupos de comerciantes reivindicaran para sí la exclusividad de la venta de la fruta marrón.

Habiendo subido el tono de la discusión, la corporación de comerciantes decidió mandar la fruta a la Universidad para que estudien su naturaleza.



Allí se hicieron proyectos de investigación a largo plazo, donde también fue propuesto el tema como tesis de los doctorandos.

Es cierto que los estudiantes están por encima de las preocupaciones de los profesores ya que a ellos solo les interesa "el pueblo". Sin embargo no fue así en este caso. Se formaron dos facciones, el PP (Partido de la Pera) y el PM (Partido de la Manzana).

¿Cuál fue la actitud de nuestro comerciante de frutas? Él dudaba. Es cierto que estaba entre los vendedores de manzanas, pero estaba la posibilidad de conseguir una licencia para abrir filiales nuevas en pueblos vecinos donde vendería pera.

Él se retiró a reflexionar sobre la naturaleza de la fruta, descuidando sus deberes familiares y se lo veía cabizbajo y meditabundo y a veces hablaba solo:

Qu' est ce que c'est ?

Al fin de cuentas había estudiado cursos de filosofía donde se hacían siempre esta pregunta. Pero el tema lo hacía adelgazar y le daba insomnio. Hasta se olvidaba de pagar el hotel de su mujer, quien no recibía cartas como era de costumbre.

Su mujer estaba pasando sus vacaciones en la playa con su hijo mayor. La otra hija, de dos años, había quedado en la ciudad, con él, porque no le hacía bien el sol.

Él había oído hablar de los primeros resultados sensacionales de un grupo de investigación dirigido por el profesor La Reynette. Lo fue a ver y le preguntó:

Qu' est ce que c'est ?

El profesor le mostró cinco trabajos recientemente publicados donde se deducía, provisoriamente, el origen manzanezco de la fruta marrón basados en mediciones de precisión del almidón y azúcar de la misma.

Si embargo el decano Caumissee, defensor del origen del tipo pera, criticaba los escritos de La Reynette por haber analizado especímenes localmente extraídos. El trabajo del decano era en cambio de tipo global.



Dejemos por un instante las reflexiones de nuestro comerciante. Su hija menor se divertía jugando con las frutas marrones, ya las hacía rodar, ya se las tiraba a los gatos vagabundos que pasaban por su vereda. A ella le gustaba ver a los más pobres comerciantes, que en bicicleta ofrecían la fruta marrón:

Vendo papas, vendo papas!

Un día llegó la mujer y su hijo mayor. Este, viendo el nuevo "juguete" marrón le preguntó a la chiquita:

*Qu' est ce que c'est ?
Es una papa !*

Fue en este instante que nuestro comerciante conoció la realidad de la fruta marrón. Él comprendió la respuesta de su hija de dos años. La fruta marrón no era ni una pera ni una manzana sino una papa. Era simplemente algo nuevo.

Ni los profesores ni los estudiantes habían podido reconocer algo nuevo. Ellos y nuestro comerciante de frutas eran demasiado viejos como para admitir algo nuevo que no conocían.

Todo terminó bien. A pesar de los días perdidos por las refriegas entre estudiantes por PP y PM todos pudieron felizmente rendir sus exámenes. Y empezó así un nuevo capítulo de investigación sobre la papa recientemente descubierta.



REFERENCIAS

- 1) Ortiz Frágola, E. Comunicación privada .
- 2) Baier G., Leder, R. S., Parmananda P. *Human Electroencephalogram induces transient coherence in excitable spatiotemporal chaos*. Phys. Rev. Lett., 84, 4501, 2000.
- 3) Yacomotti, A. M., Eguía, M. C., Aliaga, J., Martinez, O., E., Mindlin, G.B., Lipsich, A. *Interspike time distribution in noise driven excitable systems*. Phys. Rev Lett. 83, 292, 1999.
- 4) Roberts, S., Eykholt., R., Thaut, M. H. *Analysis of correlations and search for evidence of deterministic chaos in rhythmic motor control by the human brain* Phys. Rev. E. 62, 2597, 2000.
- 5) Lorenz, E. N. *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci 20, 130, 1963.
- 6) Gleick, J. *Chaos: Making a New Science*. Ed. Viking, New York, 1987.
- 7) Solari, H. G., Natiello, M. A., Mindlin, G. B. *Nonlinear Dynamics*. Ed. IOP Publishing Ltd, UK, 1996.
- 8) Lorenz, E. N. *La esencia del Caos*. Ed Debate. Madrid, 2000.
- 9) Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Ed. Perseus Massachusetts, 1994.
- 10) Poincaré, H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J. de Math.7, 375, 1881.
- 11) Birkhoff, G. O. *Dynamical systems*. New York, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ. 295 pp, 1927.
- 12) Bénard, H. *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent*. Ann. Chem. Physique 23, 62, 1901.
- 13) Lord Rayleigh (Strutt, J. W.). *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side* Phil. Mag. 32, 529, 1916.
- 14) Reynolds, O. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*. Phil. Trans. R. Soc. 935, 1883.
- 15) May, R. M. *Simple mathematical models with very complicate dynamics*. Nature 261, 459, 1976.
- 16) Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A. *Controlling Chaos*. Phys. Rev. Lett. 64, 1196, 1990
- 17) Flynn, C., Wilson, N. *A simple method for controlling chaos*. Am. J. Phys. 66, 730, 1998.



- 18) Casaubon, J. A. *Palabras, ideas, cosas. El problema de los universales* Ed. Candil. Buenos Aires, 1984.
- 19) Boccaletti, S., Grebogi, C., Lay, Y.-C., Mancini, H., Maza, D. *The control of chaos: Theory and applications*. Phys. Rep. 329, 103, 2000.
- 20) Chen, G., Dong, X. *From Chaos to Order* Ed. World Scientific, Singapore, 1998.
- 21) Tél, T. *Controlling Transient Chaos*. J. Phys. A 24, L1359, 1991.
- 22) Place, C. M., Arrowsmith, D. K. *Control of transient chaos in tent maps near crisis. 1. Fixed point targeting*. Phys. Rev. E. 61, 1357, 2000.
- 23) Place, C. M., Arrowsmith, D. K. *Control of transient chaos in tent maps near crisis. 2. Periodic orbit targeting*. Phys. Rev. E. 61, 1369, 2000.
- 24) Malkus, W. V. R. *Non-periodic convection at high and low Prandtl number*. Mémoires Société Royale de Sciences de Liège, Series 6, Vol. 4, 125, 1972
- 25) Tucker, W. C. Ren. Acad. Sci, 328, 1197, 1999.
- 26) Stewart, I. *The Lorenz attractor exist*. Nature, 406, 948, 2000.
- 27) González, J. A., Pino, R. *A random number generator based on unpredictable chaotic functions*. Comp. Phys. Comm. 120, 109, 1999.
- 28) Ruelle, D. *Azar y Caos* Ed. Alianza. Madrid, 1995
- 29) Alvira, R. Tesis. Universidad de Navarra, 1967.
- 30) Crespo, R. *Liberalismo económico y libertad*. Ed. Rialp, Madrid, 2000
- 31) Sanguineti, J. J. *La filosofía de la ciencia según Santo Tomás*. Ed. Eunsa, 1977
- 32) García Alonso, L. *Filosofía de la eficacia*. Ed. Jus, 1978
- 33) Alonso-Finn, *Física*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Delaware, 1995.
- 34) La Recherche, 309, 72, Mai 1998